

HODNOTÍCÍ ZPRÁVA MATEMATIKA+ 2020

POKUSNÉ OVĚŘOVÁNÍ OBSAHU, FORMY, ORGANIZACE
A HODNOCENÍ VÝBĚROVÉ ZKOUŠKY
ZE STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY V ROCE 2020

CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ



LISTOPAD 2020

OBSAH

1	Úvod	4
1.1.	Záměr.....	4
1.2.	Cíle	5
1.3.	Východiska.....	5
1.4.	Legislativní vymezení.....	5
2	Obsahová část	6
2.1.	Základní vymezení zkoušky.....	6
2.2.	Testy – jejich složení a obtížnost	8
3	Organizace	10
3.1.	Harmonogram přípravy a realizace	10
3.2.	Informační podpora.....	10
3.3.	Režim přihlašování	11
3.4.	Metodická podpora	12
3.5.	Logistika a technologie	12
3.5.1.	Logistický model zkoušky MATEMATIKA+	12
3.5.2.	Zkušební dokumentace	12
3.5.3.	Segment výroby zkušební dokumentace a její distribuce do zkušebních míst	13
3.5.4.	Předmět a rámcový objem výroby	13
3.5.5.	Kompletace zkušební dokumentace	13
3.5.6.	Termínové a kapacitní požadavky na zajištění výroby	14
3.5.7.	Distribuce do škol	14
3.5.8.	Model vyhodnocení výsledků didaktických testů.....	15
3.5.9.	Systém decentralizované digitalizace, resp. digitalizace ve zkušebních místech.....	15
3.5.10.	Výstupní dokumenty (certifikáty).....	17
3.6.	Hodnocení žákovských zápisů řešení didaktických testů	17
3.7.	Ocenění škol a žáků s nejlepšími výsledky z MATEMATIKY+ v Senátu	17
4	Analytická data	19
4.1.	Přihlášky a výsledky	19
4.2.	Zájem škol.....	21
4.3.	Realizace zkoušky	22
4.4.	Rozložení výsledků.....	23
4.5.	Výsledky podle studijních oborů	24
4.6.	Známkování	27
4.7.	Proč dobrá známka z matematiky ve společné části MZ nemusí garantovat dobré studijní výsledky na VŠ	33

4.8.	Didaktický test MATEMATIKA+.....	34
4.9.	Ukázky úloh s komentářem a výstupy z položkové analýzy	35
5	Zhodnocení pilotního projektu.....	59
5.1.	Shrnutí	59
5.2.	Naplnění cílů	59
5.3.	Ekonomika	62
5.3.1.	Rozpočet.....	62
6	Perspektiva – využití výsledků pokusného ověřování	62
7	Přílohy	65
7.1.	Didaktický test MATEMATIKA+ 2020.....	65
7.2.	Klíč správných řešení DT MATEMATIKA+ 2020	82

1 ÚVOD

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (dále jen „ministerstvo“) vyhlásilo v souladu s § 171 odst. 1 zákona č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon), ve znění pozdějších předpisů, pokusné ověřování vědomostí a dovedností středoškolské matematiky (dále jen „pokusné ověřování“) podle katalogu požadavků pro výběrovou nepovinnou zkoušku z matematiky (dále jen „MATEMATIKA+“). Pokusné ověřování výběrové zkoušky ze středoškolské matematiky bylo vyhlášeno ministerstvem pod č. j. MSMT-33785/2015-1 dne 15. 3. 2016 na období let 2017 až 2020 a bylo upraveno dodatkem vydaným pod č. j. MSMT-33785/2015-4 ze dne 30. 11. 2016.¹ Kompletní informace o zkoušce byly zveřejněny na webových stránkách CZVV maturita.cermat.cz.

Realizaci pokusného ověřování bylo ministerstvem pověřeno Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (dále jen „Centrum“).

Tato hodnoticí zpráva byla zpracována v souladu s úkolem stanoveným Centru odstavcem (4) článku 6 textu vyhlášení pokusného ověřování s cílem vyhodnotit přípravu, realizaci a výsledky sedmého ročníku pokusného ověřování realizovaného v roce 2020. Pro zachování konzistence informací jsou v následujících částech hodnoticí zprávy tam, kde to je účelné, zopakovány některé informace obsažené již v hodnotících zprávách z předchozích ročníků.

Rok 2020 byl v důsledku epidemie Covid-19 pro školství atypický. Rozhodnutím Ministerstva zdravotnictví ČR byla od 11. 3. 2020 zakázána osobní přítomnost žáků středních škol na vzdělávání. V období od března do května 2020 tedy probíhala výuka distančně za zcela výjimečných podmínek. V návaznosti na zavedení mimořádných opatření ve školství na jaře 2020 v souvislosti se šířením onemocnění Covid-19 vydalo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy 13. května 2020 dodatek č. 2 k textu pokusného ověřování zkoušky MATEMATIKA+, kterým byly upraveny podmínky konání zkoušky ve školním roce 2019/2020. Původně plánovaný termín konání zkoušky se tímto dodatkem posunul o měsíc na 3. června 2020.

Rok 2020 byl posledním ročníkem konání výběrové zkoušky MATEMATIKA+. Na základě novelizace znění školského zákona (zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání, ve znění pozdějších předpisů) zákonem č. 284/2020 Sb. (ze dne 26. 6. 2020) je s účinností od 1. 10. 2020 ustaven jako nepovinná zkouška společné části maturitní zkoušky zkušební předmět **matematika rozšiřující**, jehož cílem je navázat na záměry a cíle pokusného ověřování nepovinné výběrové zkoušky MATEMATIKA+.

1.1. ZÁMĚŘ

Pokusné ověřování bylo vyhlášeno se záměrem připravit kvalitní výběrovou zkoušku ze středoškolského učiva matematiky, která bude schopna ověřit takové dovednosti a vědomosti žáků, jež jsou důležitým předpokladem pro úspěšné zvládnutí studia na vysokých školách technického, ekonomického, matematického a přírodovědného zaměření a následně také pro kvalitní výkon vybraných profesí, a také ověřit v praxi možnost žádoucí spolupráce ministerstva a vysokých škol při využití hodnocení výsledků absolventů středního vzdělávání jako jednoho z možných kritérií přijetí k vysokoškolskému studiu. Očekává se, že motivační potenciál ověřené funkční výběrové zkoušky povede ke zvýšení celkové úrovně matematické gramotnosti žáků středních škol.

¹ Tomuto pokusnému ověřování předcházelo pokusné ověřování výběrové zkoušky ze středoškolské matematiky, kterou bylo možné konat jako nepovinnou zkoušku profilové části maturitní zkoušky (Matematika+). Toto pokusné ověřování bylo vyhlášeno MŠMT na období 2014–2016 pod č. j. MSMT-42192/2013-1 dne 12. 12. 2013 a upraveno dodatky vydanými pod č. j. MSMT-7441/2015-1 ze dne 31. 3. 2015 a pod č. j. MSMT-28299/2015-1 ze dne 2. 9. 2015.

1.2. CÍLE

Pro pokusné ověřování byly stanoveny následující základní cíle platné pro všechny fáze:

1. podpořit matematické, technické a přírodovědné vzdělávání v souladu s dokumenty Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2020 a Dlouhodobý záměr vzdělávání a rozvoje vzdělávací soustavy České republiky na léta 2011 až 2015;
2. motivovat žáky a jejich učitele ke zvýšenému úsilí dosahovat takových vědomostí a dovedností v oblasti matematického vzdělávání, jež odpovídají očekávaným výstupům podle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia (RVP G) a podle rámcových vzdělávacích programů dalších oborů vzdělání, které mají alespoň desetihodinovou týdenní dotaci výuky matematiky po dobu středního vzdělávání;
3. podpořit kvalitu výuky v oblasti matematického vzdělávání a nabídnout mimořádně nadaným žákům zkoušku na úrovni jejich schopností; zastavit trend klesající připravenosti uchazečů o vysokoškolské studium matematických a technických oborů;
4. potvrdit využitelnost zkoušky MATEMATIKA+ jako jednoho ze závazných kritérií přijímacího řízení ke studiu na VŠ či kritéria pro motivační stipendijní programy;
5. na základě průběžného kvalitativního vyhodnocení výsledků maturitní zkoušky formulovat případné úpravy kurikula metod a podmínek vyučování matematiky na středních školách.

1.3. VÝCHODISKA

Společná část maturitní zkoušky v jedné úrovni obtížnosti je dnes standardizovaná certifikační zkouška, která by měla být dostupná absolventům různých typů středních škol, na nichž se v současné době vzdělává zhruba 76 % žáků příslušných populačních ročníků. Tato zkouška vymezuje pouze minimální úroveň, které musí maturant z daného předmětu dosáhnout, nemůže proto jako kritérium uspokojit požadavky těch vysokých škol, které předpokládají u svých uchazečů osvojení znalostí, vědomostí a dovedností na úrovni gymnaziálních oborů s přírodovědným či matematickým zaměřením nebo na úrovni středních technických škol s tradičním zaměřením na výchovu a vzdělávání budoucích zájemců o inženýrské obory.

Klíčovou rolí pro úspěch realizace zkoušky MATEMATIKA+ sehrávají vysoké školy. Pokud se žáci oborů středního vzdělání ukončených maturitní zkouškou dočkají ze strany vysokých škol jasně deklarovaného přijetí MATEMATIKY+ jako možné součásti kritérií pro přijímací řízení nebo kritéria pro motivační stipendia, budou motivováni se k této zkoušce připravovat a učitelé je snáze získají pro volitelné matematické semináře, v nichž si žáci mohou upevnit znalosti a doplnit učivo, které není do běžné výuky zařazováno (kuželosečky, analytická geometrie v prostoru, stereometrie, obtížnější kapitoly z kombinatoriky a pravděpodobnosti, obecné posloupnosti včetně limit, geometrické řady, parametrické rovnice, komplexní čísla apod.).

1.4. LEGISLATIVNÍ VYMEZENÍ

Rozhodnými právními dokumenty pro hlavní fázi pokusného ověřování byly:

1. text vyhlášení pokusného ověřování č. j. [MSMT-33785/2015-1](#) ze dne 15. 3. 2016, jehož úplné znění je přílohou č. 1 této hodnoticí zprávy, zejména pak článek 3 tohoto textu;
2. dodatek k vyhlášení pokusného ověřování č. j. [MSMT-33785/2015-4](#) ze dne 30. 11. 2016;
3. dodatek č. 2 k vyhlášení pokusného ověřování č. j. [MSMT-16852/2020-1](#) ze dne 13. května 2020.

2 OBSAHOVÁ ČÁST

2.1. ZÁKLADNÍ VYMEZENÍ ZKOUŠKY

Rozsah požadavků na vědomosti a dovednosti žáků v nepovinné zkoušce MATEMATIKA+ je vymezen katalogem požadavků. Tento dokument vychází z rámcových a školních vzdělávacích programů pro gymnázia a rovněž z rámcových a školních vzdělávacích programů oborů středního vzdělání ukončených maturitní zkouškou. Katalog také respektuje požadavky vysokých škol matematického, přírodovědného a technického zaměření na úroveň vědomostí a dovedností uchazečů o studium.

Katalogem vymezené požadavky výběrové nepovinné zkoušky MATEMATIKA+ mohou svým obsahem přesáhnout minimální požadavky vymezené v rámcových vzdělávacích programech oborů středního vzdělání ukončených maturitní zkouškou. Tímto vymezením však v žádném směru neomezují právo žáků oborů středního vzdělání s maturitní zkouškou přihlásit se ke zkoušce.

Jako podpůrné prameny byly využity publikované standardy a didaktické materiály:

- FUCHS, E., BINTEROVÁ, H. a kol. **Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborná učiliště**. Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-294-5.
- FUCHS, E., KUBÁT, J. a kol. **Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia**. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
- FUCHS, E., PROCHÁZKA, F. a kol. **Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborné školy**. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-097-7.

[Katalog požadavků ke zkoušce MATEMATIKA+](#) obsahuje 9 tematických okruhů podobně jako Katalog pro společnou část maturitní zkoušky z matematiky, avšak rozsah učiva je mnohem hlubší. Nedílnou součástí katalogu požadavků je příloha s ukázkami testových úloh. Pro ilustraci je uveden **přesah požadavků** ke zkoušce MATEMATIKA+ v jednotlivých tematických okruzích.

Číselné obory

- mocniny s racionálním exponentem;
- celá kapitola komplexních čísel;
- zobrazení komplexních čísel v Gaussově rovině;
- komplexní čísla v algebraickém i goniometrickém tvaru;
- absolutní hodnota a argument komplexního čísla a jejich geometrický význam;
- čísla komplexně sdružená;
- sčítání, odčítání, násobení a dělení komplexních čísel v algebraickém tvaru, převrácené číslo;
- násobení, dělení, umocňování a odmocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru užitím Moivreovy věty;
- rovnost komplexních čísel, řešení rovnic;
- binomické rovnice.

Algebraické výrazy

- odmocniny a složitější úpravy výrazů;
- mocniny s racionálním exponentem.

Rovnice a nerovnice a jejich soustavy

- racionální rovnice, rovnice s absolutní hodnotou, rovnice s parametrem, soustavy tří lineárních rovnic, soustavy rovnic lineární a kvadratické.

Funkce

- grafy funkcí (lineární, kvadratické, lineární lomené, exponenciální, logaritmické a goniometrické) $y = f(x)$, $y = a \cdot f(bx + c) + d$; $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$;
- určit funkci inverzní k dané funkci, sestavit její graf, užít poznatky o složené funkci;
- výrazy s elementárními funkcemi;
- exponenciální, logaritmické a goniometrické rovnice a elementární nerovnice;
- mocninné funkce.

Posloupnosti, řady, finanční matematika

- určit posloupnost rekurentně; vlastnosti posloupností;
- limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada.

Planimetrie

- konstrukční úlohy (trojúhelníky, mnohoúhelníky, kružnice), shodná zobrazení, stejnolehlost;
- Eukleidovy věty, obvodové a středové úhly v kružnici.

Stereometrie

- metrické a polohové vztahy, komolá tělesa (ve společné části je obsažen pouze objem a povrch jednoduchých těles).

Analytická geometrie

- operace s vektory (vektorový součin);
- kuželosečky;
- analytika v prostoru.

Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

- binomická věta a Pascalův trojúhelník;
- nezávislost jevů, pravděpodobnost sjednocení a průniku dvou jevů;
- charakteristiky variability (rozptyl, směrodatná odchylka).

Do katalogu požadavků ke zkoušce MATEMATIKA+ nebyla zařazena „Výroková logika“, ačkoliv je součástí výstupů RVP pro gymnázia. Není totiž obsažena v žádném z rámcových vzdělávacích programů pro obory odborných škol zakončených maturitní zkouškou. Chybí i infinitezimální počet, který vysoké školy v současné době nezařazují mezi vstupní požadavky, ačkoliv je na mnohých středních školách tradičně probírán.

Zastoupení jednotlivých tematických okruhů je uvedeno v následující tabulce.

TEMATICKÉ OKRUHY	ZASTOUPENÍ V TESTU (V %)
1. Číselné množiny	4–10
2. Algebraické výrazy	4–14
3. Rovnice a nerovnice	10–20
4. Funkce	10–20
5. Posloupnosti a řady, finanční matematika	4–14
6. Planimetrie	10–18
7. Stereometrie	4–14
8. Analytická geometrie	8–18
9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika	4–14

Uvedená procenta se netýkají počtu úloh, ale představují podíl bodů, které lze získat v úlohách k daným tematickým okruhům.

2.2. TESTY – JEJICH SLOŽENÍ A OBTÍŽNOST

Didaktické testy jsou sestaveny z 12 otevřených a 11 uzavřených úloh. V testu lze získat maximálně 50 bodů, polovina z nich je za otevřené a polovina za uzavřené úlohy. Náhodný skóre testu je necelých 10 %, minimální hranice úspěšnosti je stanovena na 33 %.

Otevřené úlohy mj. testují tzv. produktivní dovednosti. **V úzce otevřených úlohách** se zpravidla ověřuje úroveň osvojení základních znalostí a dovedností a schopnost rutinně aplikovat vědomosti ve standardních situacích. **V široce otevřených úlohách** se klade důraz na přesnost a preciznost řešení. Díky zařazení otevřených úloh lze ověřovat učivo planimetrie v konstrukčních úlohách. V obtížnějších úlohách může žák uplatnit různé strategie řešení a prezentovat tak osvojení učiva na vyšší úrovni.

Z uzavřených úloh se užívají **svazky dichotomických úloh**, v nichž lze spolehlivě rozeznat, zdali žák vědomosti a dovednosti používá s porozuměním. Kvalita **přířazovacích úloh** tkví v možnosti odstupňovat obtížnost obdobných úkolů. Úlohy s výběrem odpovědi s 5 alternativami zpravidla ověřují osvojení učiva ve standardní úrovni.

Didaktické testy z MATEMATIKY+ se od testů z matematiky ve společné části maturit liší, mj. požadovanou úrovní osvojení učiva. V didaktických testech pro zkoušku MATEMATIKA+ je obsaženo větší množství komplexních úloh, které se v testech z matematiky ve společné části maturitní zkoušky prakticky nevyskytují. Úlohy odpovídající obtížností standardním požadavkům matematiky na gymnáziích tvoří asi 55–60 % didaktického testu. Zhruba 30 % úloh je jednodušších, avšak i tyto úlohy zpravidla překračují rozsah učiva požadovaného ve společné části maturitní zkoušky.

Zbývajících 10–15 % úloh předpokládá vyšší úroveň osvojení učiva, tedy schopnost žáka aplikovat znalosti a dovednosti v nestandardních situacích. Ani v této náročnější zkoušce se v současné době neobjevují důkazové úlohy vzhledem k jejich nízké úspěšnosti.

Žák ve zkoušce uspěje, dosáhne-li alespoň 33 % maximálního možného skóre. Výsledek alespoň dobrý je od 50 % výše, alespoň chvalitebný od 68 % výše a k výbornému výsledku je třeba získat nejméně 86 % maximálního možného skóre.

Žák způsobilý pro studium na VŠ, jejíž studijní program předpokládá další rozvoj vědomostí v matematice, by měl ve zkoušce MATEMATIKA+ dosáhnout alespoň výsledku dobrý.

O zkoušce MATEMATIKA+ nelze uvažovat jako o plošné zkoušce pro gymnázia a technické školy. Pro úspěšné absolvování didaktického testu MATEMATIKA+ se předpokládá týdenní hodinová dotace matematiky za poslední čtyři roky studia na střední škole v rozmezí od 15 do 20 hodin (včetně volitelných seminářů). Minimální hodinová dotace pro gymnázia je podle RVP 12 hodin, což lze považovat za rozumnou mez pro zkoušku z matematiky ve společné části maturitní zkoušky. Nelze předpokládat, že humanitně zaměřený žák si bude vybírat mezi volitelnými semináři právě matematiku. I když projekt připouští zapojení škol s dotací matematiky minimálně 10 hodinami, předpokládá se, že střední školy posílí výuku matematiky prostřednictvím disponibilních hodin věnovaných volitelným seminářům.

3 ORGANIZACE

MATEMATIKA+ je koncipována jako výběrová zkouška, organizačně má však všechny atributy standardní maturitní zkoušky. Pro její realizaci lze tedy využít celý komplex technologického, logistického a ICT zabezpečení maturitní zkoušky.

V letech 2015 a 2016 byla MATEMATIKA+ organizována jako nepovinná zkouška profilové části a celá organizace přípravy zkušební dokumentace, přihlašování žáků a realizace byla podřízena pravidlům platným pro maturitní zkoušku. V roce 2017 se v souladu s Vyhlášením pokusného ověřování MATEMATIKA+ vrátila do režimu, v jakém probíhala při prvním ročníku v roce 2014, tedy do režimu organizace mimo maturitní zkoušku a konání pouze v jednom, a to jarním, zkušebním období. Stejně jako v předchozích ročnících se zkouška konala formou didaktického testu zařazeného na konec jednotného zkušebního schématu (JZS) určeného pro písemné zkoušky společné části maturitní zkoušky. Pro realizaci zkoušky byl využit celý komplex technologického, logistického a ICT zabezpečení maturitní zkoušky.

3.1. HARMONOGRAM PŘÍPRAVY A REALIZACE

Pro přípravu a realizaci pilotního projektu byl stanoven následující harmonogram:

NÁZEV ÚKOLU	ZAHÁJENÍ	DOKONČENÍ
Pokusné ověřování zkoušky MATEMATIKA+ 2020	2. 10. 2019	10. 6. 2020
Informování vysokých a středních škol	2. 10. 2019	31. 12. 2019
Založení projektu MA+2020 v IS CERTIS	14. 10. 2019	17. 10. 2019
Informace od VŠ ohledně akceptace MA+	7. 10. 2019	31. 12. 2019
Přihlášení k MA+ prostřednictvím VPŽ	2. 12. 2019	31. 1. 2020
Předání autentizačního kódu VPŽ žákům	2. 12. 2019	20. 12. 2019
Zpřístupnění VPŽ žákům pro registraci k MA+	2. 1. 2020	31. 1. 2020
Příprava zkušební dokumentace	1. 11. 2019	6. 3. 2020
Výroba zkušební dokumentace	27. 4. 2020	28. 4. 2020
Výběr a smluvní zajištění spádových škol	2. 1. 2020	31. 3. 2020
Distribuce zkušební dokumentace v rámci ZD k MZ	26. 5. 2020	28. 5. 2020
Konání MA+ v rámci JZS MZ2020	3. 6. 2020	3. 6. 2020
Hodnocení otevřených úloh didaktického testu	3. 6. 2020	6. 6. 2020
Hodnocení uzavřených úloh	3. 6. 2020	6. 6. 2020
Zpřístupnění výsledků formou výpisu DT MA+ ve VPŽ	10. 6. 2020	10. 6. 2020

3.2. INFORMAČNÍ PODPORA

První cílovou skupinou v rámci informační podpory pokusného ověřování MATEMATIKA+ v roce 2020 byly **střední školy**, jejichž žáci byli potenciálními uchazeči o vykonání zkoušky. Ředitelé škol byli o organizaci zkoušky informováni e-maily zasílanými prostřednictvím informačního systému Centra. Vzhledem k tomu, že systém plní obdobnou funkci také při organizaci maturitní zkoušky a jednotné přijímací zkoušky, jedná se o spolehlivou hlavní páteř komunikace se středními školami.

Před začátkem přihlašování k maturitní zkoušce v jarním zkušebním období 2020 byl školám zaslán hromadný e-mail, který obsahoval podrobné informace ke způsobu přihlašování maturantů ke zkoušce

MATEMATIKA+. Intenzivní komunikace pak probíhala také mezi Centrem a tzv. spádovými školami, na nichž se následně zkouška uskutečnila. Tyto školy byly vytipovány s ohledem na strukturu přihlášených žáků a probíhala s nimi aktivní forma telefonické a e-mailové komunikace prostřednictvím oblastních manažerů logistiky a operátorů HelpDesku Centra. Pro účely přihlašování ke zkoušce a zajištění organizace zkoušky byl HelpDesk Centra k dispozici všem školám a žákům.

Druhou cílovou skupinou aktivní komunikace byly **fakulty vysokých škol**, kterým byl na podzim 2019 odeslán informační e-mail se základními informacemi o zkoušce MATEMATIKA+ a požadavkem na podání zpětné vazby ve smyslu možného využití výsledku zkoušky MATEMATIKA+ v rámci přijímacího řízení či stipendijního programu. Pro případné dotazy mohly vysoké školy využít e-mailovou adresu info@cermat.cz, případně telefonický nebo e-mailový kontakt na oddělení matematiky Sekce evaluačních nástrojů nebo referát vnějších vztahů Centra.

Třetí cílovou skupinou pak byli samotní **žáci**, kteří se ke zkoušce mohli dobrovolně přihlásit, **a veřejnost**. Tato cílová skupina byla informována prostřednictvím webových adres www.cermat.cz, maturita.cermat.cz a také prostřednictvím výsledkového portálu žáka (vpz.cermat.cz). Informace o zkoušce na maturita.cermat.cz byly průběžně aktualizovány od září 2019 až do samotného konání zkoušky. Od října 2019 do ledna 2020 byly na webu zveřejňovány rovněž aktuální seznamy fakult vysokých škol akceptujících výsledek zkoušky MATEMATIKA+ v rámci přijímacího řízení nebo stipendijních programů. Informace o zkoušce včetně základních pokynů pro přihlášení byly také součástí [Maturitního zpravodaje č. 52](#), který byl vydán v polovině listopadu 2019.

[Výsledkový portál žáka](#) (VPŽ) sloužil nejen pro registraci uchazečů, která probíhala od 2. do 31. ledna 2020, ale i pro přímou komunikaci s přihlášenými žáky. Portál je přímo propojen s informačním systémem CERTIS, který bezpečně uchovává data o přihlášených žácích, proto se jedná o přímý informační kanál ke komunikaci se samotnými žáky. Díky tomuto propojení mohla být v únoru přihlášeným žákům na jejich e-mailové adresy zaslána potvrzení o přijetí přihlášky a v polovině května 2020 odeslány aktualizované pozvánky ke zkoušce.

K předání výsledků zkoušky žákům formou výpisu výsledků didaktického testu 10. června 2020 posloužil opět výsledkový portál žáka. Na výpisu výsledků didaktického testu byl uveden detailní bodový zisk daného žáka u jednotlivých úloh. Dokument byl zároveň opatřen elektronickým podpisem pro potřeby vysokých škol. Současně s výpisem výsledku didaktického testu byl žákům odeslán i ohodnocený záznamový arch.

Po celou dobu organizace pokusného ověřování MATEMATIKA+ 2020 byl žákům k dispozici také HelpDesk Centra na čísle 224 507 507 a e-mailová adresa info@cermat.cz.

Zástupci CZVV vystoupili s příspěvky o zkoušce MATEMATIKA+ i na celostátních konferencích, a to 23. 9. 2019 na *Celostátním setkání učitelů matematiky středních škol* v Pardubicích a 17.–19. 10. 2019 na konferenci *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* v Litomyšli, kde byli přítomni také učitelé středních škol. Proběhla i krátká neformální jednání se zástupci vybraných veřejných vysokých škol, na kterých byla prezentována podoba zkoušky a výsledky účastníků.

3.3. REŽIM PŘIHLAŠOVÁNÍ

Přihlašování k pokusnému ověřování MATEMATIKA+ začalo v souladu s vyhlášením 2. ledna 2020 a o jeho způsobu byli uchazeči informováni prostřednictvím webových stránek. Obdobně jako v roce 2019 bylo přihlašování uchazečů řešeno prostřednictvím výsledkového portálu žáka na adrese vpz.cermat.cz.

Po vstupu na portál vpz.cermat.cz si uchazeč nejprve mohl pročíst základní informace ke zkoušce a získal zde i návod k přihlášení. Přihlášení ke zkoušce spočívalo v jednoduché registraci, ke které žák potřeboval jedinečnou e-mailovou adresu, své zvolené heslo (v souladu se zásadami kybernetické bezpečnosti) a autentizační kód VPŽ. Autentizačním kódem VPŽ byl 10místný alfa-numerický kód, který

byl uveden na výpisu z přihlášky žáka k maturitní zkoušce. Po zadání údajů odeslal systém výsledkového portálu žáka žákovi potvrzující e-mail o registraci. Následně se mohl žák k pokusnému ověřování MATEMATIKA+ prostřednictvím VPŽ do předem určeného termínu přihlásit či se ze zkoušky odhlásit.

Po ukončení přihlašování byla data z portálu importována do IS CERTIS, jehož prostřednictvím byli uchazeči rozsazeni do spádových škol. O umístění do konkrétní spádové školy byli následně informováni v pozvánce ke zkoušce.

3.4. METODICKÁ PODPORA

Ředitelům spádových škol a zadavatelům zkoušky v učebně byly v dostatečném předstihu zpřístupněny metodické pokyny k zajištění zkoušky ve škole. Jejich forma i struktura nebyla nijak odlišná od formy, která se využívá pro maturitní zkoušku a na kterou jsou pedagogičtí pracovníci škol zvyklí.

3.5. LOGISTIKA A TECHNOLOGIE

3.5.1. LOGISTICKÝ MODEL ZKOUŠKY MATEMATIKA+

Systém logistického zabezpečení byl členěn na následující segmenty:

- příprava zkušební dokumentace včetně modifikací PUP a překladu do polštiny;
- přihlášení žáků ke zkoušce;
- výroba zkušební dokumentace, její uskladnění a distribuce do zkušebních míst;
- realizace zkoušek;
- pořízení, zpracování, vyhodnocení a prezentace výsledků a jejich archivace;
- zajištění personální infrastruktury;
- řízení, monitorování a informační zajištění logistických procesů a řízení bezpečnostních rizik.

3.5.2. ZKUŠEBNÍ DOKUMENTACE

Centrum připravilo zkušební dokumentaci pro zkoušku MATEMATIKA+ pro každého přihlášeného žáka (uchazeče) na základě údajů z přihlášek k maturitní zkoušce. Zkušební dokumentace obsahovala:

TESTOVÝ SEŠIT

Testový sešit je dokument obsahující zadání zkoušky. Příprava a výroba testových sešitů byla zajištěna v bezpečnostním režimu Tiskového, produkčního a kompletačního centra (TPKC).

ZÁZNAMOVÝ ARCH

Pro zkoušku byl připraven a vyroben záznamový arch (ZA), na kterém je uveden název zkoušky, kód zkoušky, identifikační kód žáka (ID), jméno a příjmení žáka a RED IZO školy. ID kód žáka, jeho jméno, příjmení a RED IZO kmenové školy jsou údaje, které jsou na záznamový arch automaticky generovány z přihlašovací aplikace. Záznamový arch slouží k zápisu řešení úloh zkoušky a je přizpůsoben záznamu různých typů odpovědí, tedy od prostého vyznačení vybrané alternativy křížkem po záznam postupu řešení do vyznačeného pole. Záznamový arch umožňuje i zápis řešení široce otevřených úloh včetně geometrických úloh s předkreslenými obrázky.

OSTATNÍ ZKUŠEBNÍ DOKUMENTACE

Ostatní zkušební dokumentaci tvoří zejména:

- prezenční listiny;
- protokoly o průběhu konání zkoušek v učebně;

- pokyny pro zadavatele do učebny;
- výčetky zkušebních materiálů;
- doprovodné materiály (obálky).

3.5.3. SEGMENT VÝROBY ZKUŠEBNÍ DOKUMENTACE A JEJÍ DISTRIBUCE DO ZKUŠEBNÍCH MÍST

Zkušební dokumentace byla centrálně vyráběna a distribuována do jednotlivých zkušebních míst společně se zkušební dokumentací písemných zkoušek společné části maturitní zkoušky.

Z pohledu nároků na kvalitu tisku byla zvláštní pozornost věnována té části zkušební dokumentace, která je určena k digitalizaci a následnému automatickému vytěžení dat. Tyto zvýšené nároky na kvalitu tisku se týkají:

- záznamového archu;
- prezenční listiny žáků v učebně;
- protokolu o průběhu zkoušky v učebně.

Výše uvedené dokumenty určené k digitálnímu vytěžení byly vždy vyrobeny adresně, tj. s identifikátory konkrétní školy, učebny, žáka a typu dokumentu.

Veškerá dokumentace byla tištěna digitálně černobíle na papír s gramáží 80 g/m².

IDENTIFIKACE MÍSTA KONÁNÍ ZKOUŠEK

Zkušební místo

Zkušebním místem se rozumí škola, resp. její odloučené pracoviště, kde jsou administrovány písemné zkoušky. Zkušební místo je hlavní jednotkou pro balení a distribuci. Zkouška MATEMATIKA+ se konala v 59 zkušebních místech.

Zkušební učebna

Zkušební učebnou je entita žáků s jednoznačnou vazbou na zkušební místo, kde probíhá právě jedna zkouška nebo dílčí zkouška. Zkušební učebna je nejmenší jednotkou pro kompletaci a balení zkušební dokumentace. Kapacita učebny je maximálně 17 žáků, v případě žáků s přiznaným uzpůsobením podmínek pak 14 žáků.

3.5.4. PŘEDMĚT A RÁMCOVÝ OBJEM VÝROBY

Objem výroby je určen počtem přihlášených žáků a rozsahem zkušební dokumentace. Pro zkoušku MATEMATIKA+ byla vyráběna zkušební dokumentace pro 3 419 přihlášených žáků. Na základě přihlášek bylo nutné upravit testové sešity pro žáky s přiznaným uzpůsobením podmínek pro konání maturitní zkoušky kategorie a skupiny SPUO-2 a SPUO-3-A, SP-2 a TP-2. Celkový objem výroby činil cca 75 tisíc tiskových stran.

3.5.5. KOMPLETACE ZKUŠEBNÍ DOKUMENTACE

BALÍČEK PRO UČEBNU

Balíček pro učebnu, který je bezpečně zabalen, obsahuje následující dokumenty:

- výčetku materiálů na učebnu;
- prezenční listinu;
- testové sešity;
- záznamové archy;

- pokyny pro zadavatele do učebny;
- protokol o průběhu zkoušky v učebně.

BALÍČEK PRO ZKUŠEBNÍ PŘEDMĚT

Balíček pro zkušební předmět obsahuje požadované balíčky pro učebny dle rozsazení žáků.

ZÁSILKA PRO ZKUŠEBNÍ MÍSTO

Zásilka pro zkušební místo obsahovala balíček pro zkušební předmět MATEMATIKA+ a další doprovodné materiály, kterými jsou:

- výčetka materiálů na zkušební místo;
- papírové obálky.

3.5.6. TERMÍNOVÉ A KAPACITNÍ POŽADAVKY NA ZAJIŠTĚNÍ VÝROBY

Výroba zkušební dokumentace probíhala v dubnu 2020 separátně od výroby zkušební dokumentace pro písemné zkoušky maturitní zkoušky.

3.5.7. DISTRIBUCE DO ŠKOL

Distribuce zadání zkoušky do zkušebních míst proběhla společně s distribucí zadání pro písemné zkoušky společné části maturitní zkoušky ve dnech 26. až 28. května 2020.

REALIZACE PÍSEMNÝCH ZKOUŠEK, TEDY DIDAKTICKÉHO TESTU ZKOUŠKY MATEMATIKA+

Procesy předcházející konání písemných zkoušek v učebnách

Před termínem konání písemných zkoušek ředitel zajistí místnost pro uložení zásilky se zkušební dokumentací zaslanou z Centra, zkontroluje přípravu učeben a informuje žáky o možnosti využití povolených pomůcek.

Ředitel školy zajistí ve škole vyvěšení jmenných seznamů žáků, které mu byly vygenerovány v IS CERTIS.

Bezprostředně před konáním zkoušky se ve zkušebním místě uskuteční společné jednání školního maturitního komisaře, zadavatelů a ředitele školy. Komisař v rámci jednání překontroluje platnost dokladů jednotlivých zadavatelů (tj. Jmenování ZAD) a neporušenost balení zásilky se zkušební dokumentací.

Ředitel školy zásilku protokolárně otevře, vyjme z ní dokumentaci pro příslušné zkušební učebny a předá pod dohledem komisaře každému zadavateli balíček pro jeho učebnu a jednu prázdnou obálku určenou na odevzdání dokumentace po ukončení zkoušky.

Procesy v průběhu konání písemných zkoušek v učebnách

Zkouška MATEMATIKA+ se konala dne 3. 6. 2020 dle jednotného zkušebního schématu. Nejdříve zadavatel provedl administraci zkoušky – zkontroloval pomůcky a rozdal dokumentaci, pak žáci řešili jednotlivé úlohy v testu, po uplynutí časového limitu zadavatel vybral vyplněné záznamové archy a vyplnil protokol o průběhu zkoušky v učebně.

Procesy následující bezprostředně po konání písemných zkoušek společné části maturitní zkoušky v učebnách

Zpracování zkušební dokumentace po zadávání písemných zkoušek je založeno především na správném rozřídění zkušební dokumentace z jednotlivých učeben. Vždy je však prvním krokem předání veškeré dokumentace z učebny zadavatelem komisaři v této struktuře:

- obálka obsahující záznamové archy, prezenční listinu a protokol o průběhu zkoušky v učebně;
- testové sešity a ostatní zkušební dokumentace vyjma záznamových archů a protokolu o průběhu MZ v učebně.

Zkušební dokumentace z učeben je rozdělována a zpracovávána následovně:

- obálky z didaktických testů označené:
 - komisař zajistí digitalizaci obsahu obálky současně s příslušným protokolem o průběhu MZ v učebně a prezenční listinou, následně takto získaná data zašle elektronickou cestou k centrálnímu zpracování do Centra pomocí pracoviště DDT (datový a digitalizační terminál); poté komisař předá veškerou dokumentaci řediteli školy k archivaci;
 - ostatní dokumentaci předá komisař řediteli školy, který s ní naloží dle vlastního uvážení (materiály nemají žádné další uplatnění).

3.5.8. MODEL VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ DIDAKTICKÝCH TESTŮ

TERMÍN PRO VYHODNOCENÍ DIDAKTICKÝCH TESTŮ ZKOUŠKY MATEMATIKA+

Termín pro předání hodnocení didaktických testů MATEMATIKA+ byl stanoven na 10. 6. 2020. Rozhodující vliv na dobu zpracování má rozsah a složitost hodnocení otevřených úloh.

Model vyhodnocení výsledků didaktických testů je založen na vytěžení digitalizovaných záznamových archů (ZA). Odpovědi žáků u zkoušky MATEMATIKA+ měly tyto formy:

- „křížkování“ – u uzavřených úloh;
- vlastnoruční vyplnění krátké odpovědi (slova/názvu či slovního spojení či výrazu apod.) – u úzce otevřených úloh;
- vlastnoruční zápis celého postupu řešení – u široce otevřených úloh;
- záznam (zákres) do připravených obrázků.

Všechny uzavřené úlohy jsou vyhodnocovány automatizovaně. Úzce otevřené úlohy i široce otevřené úlohy hodnotí posuzovatelé (rateři). Tuto roli vykonávají speciálně vyškolení učitelé matematiky.

3.5.9. SYSTÉM DECENTRALIZOVANÉ DIGITALIZACE, RESP. DIGITALIZACE VE ZKUŠEBNÍCH MÍSTECH

MODEL DECENTRALIZOVANÉ DIGITALIZACE UMOŽŇUJE:

- centrálně i lokálně archivovat a evidovat veškerou maturitní dokumentaci, tj. záznamové archy didaktických testů i písemných prací, hodnoticí i procesní protokoly atp.;
- vytvořit centrální úložiště veškeré maturitní dokumentace a nad ním aplikaci, která umožní autorizovaným pracovníkům MŠMT a krajů přístup k veškeré dokumentaci v rámci

rozhodování o odvolání podaném žákem, resp. o žádosti o přezkoumání průběhu a výsledku zkoušky.

SYSTÉM DECENTRALIZOVANÉ DIGITALIZACE SE SKLÁDÁ Z NÁSLEDUJÍCÍCH KOMPONENT:

- lokální digitalizační pracoviště a komunikační terminály ve školách (DDT) umístěné ve všech maturitních lokalitách (sídlech škol a jejich „maturitních“ odloučených pracovištích); funkce DDT zajišťuje digitalizační sestava (PC, dokumentový skener a tiskárna) vybavená příslušným SW, který (1) provádí autonomně automatizovaně veškeré potřebné kontroly digitalizovaných dokumentů (úplnost, čitelnost) a (2) v součinnosti se systémem centrálního řízení datové komunikace (CMDK) mezi školami a centrem řídí a optimalizuje proces odesílání dat do centra;
- centrální interní pracoviště Centra pro vytěžování dat, tj. tzv. datová vytěžovací farma (DVF); jedná se o pracoviště, které v reálném čase zpracovává digitalizované dokumenty, vytěžuje z nich příslušná data, provádí kontrolu datové integrity a řeší neshodné situace a je integrálně propojeno s IS CERTIS. Dále obsahuje systém správy centrálního datového a centrálního dokumentového úložiště (CDAS/CDOS) a IS řídicího a dohledového centra (RDC);
- systém centrálního řízení datové komunikace mezi školami a centrem (CMDK); jeho úkolem je optimalizovat v komunikačních špičkách zatížení datových linek cestou rozložení datové komunikace mezi DDT a centrem.²

Systém je integrálně propojen na další klíčové komponenty komplexního informačního systému, a to na IS CERTIS a řídicí a dohledové centrum (RDC) a na banku testových úloh (BTÚ) v rámci přípravy šablon zkušební dokumentace (záznamových archů) a procesní dokumentace (procesních protokolů), které jsou systémem zpracovávány pro potřebu monitorování logistických procesů a řízení bezpečnostních a spolehlivostních rizik.

PARAMETRY DDT:

- HW a SW konfigurace umožňuje zpracování (tj. digitalizaci) všech typů používaných záznamových archů a procesních protokolů v reálném čase rychlostí řádově 20–30 oboustranných dokumentů formátu A4 za minutu;
- autonomně, tj. bez komunikace s centrem, optimalizuje nastavení digitalizačních parametrů, provádí kontrolu úplnosti zpracovávané dokumentace a její reálné vytěžitelnosti datovou vytěžovací farmou (DVF);
- obsluha zařízení je velmi jednoduchá a všechny procesy jsou plně automatizovány; systém umožňuje průběžnou vizuální kontrolu zpracovávaných dokumentů a při zjištění neshodných situací informuje uživatele komfortním způsobem o původu chybového stavu a nabízí způsoby jeho opravení;
- DDT umožňuje produkovat protokoly, tj. auditovatelné doklady o průběhu a ukončení příslušných procesů.

Systém nevyžaduje nadstandardní zajištění konektivity. Datový objem odpovídající jedné průměrně obsažené digitalizované ČB straně formátu A4 nepřekračuje hodnotu 50 kB.

² Bez této funkcionality by bylo nutné k zajištění datové komunikace provozovat neefektivně silné datové připojení, jehož přenosová kapacita by v období slabého datového toku zůstávala nevyužita.

SYSTÉM DDT/DVF/CMDK BYL VYUŽIT K POKRYTÍ NÁSLEDUJÍCÍCH PROCESŮ:

- digitalizace, elektronický přenos, datové vytěžení záznamových archů didaktických testů za účelem jejich automatizovaného a manuálního vyhodnocení a uložení v centrální databázi výsledků a za účelem centrální digitální archivace digitální podoby ZA DT.

3.5.10. VÝSTUPNÍ DOKUMENTY (CERTIFIKÁTY)

Výstupním dokumentem pro žáky, který obsahuje jak celkové hodnocení zkoušky, tak hodnocení dílčích úloh, je výpis výsledku didaktického testu zkoušky MATEMATIKA+.

Předání výpisu výsledku didaktického testu zkoušky MATEMATIKA+ proběhlo elektronickou formou. Žáci na výsledkovém portálu žáka zadali souhlas se zasláním výsledkového dokumentu, ten byl vygenerován v IS CERTIS a následně byl zaslán na e-mailovou adresu, kterou žák uvedl při registraci. Žák výpis obdržel v příloze e-mailu v komprimované složce, která byla chráněna heslem – autentizačním kódem VPŽ. Výsledkový dokument byl opatřen elektronickým podpisem ředitelky Centra z důvodu autorizace dokumentu.

3.6. HODNOCENÍ ŽÁKOVSKÝCH ZÁPISŮ ŘEŠENÍ DIDAKTICKÝCH TESTŮ

Didaktický test zkoušky MATEMATIKA+ byl zařazen jako poslední zkouška jednotného zkušebního schématu písemných zkoušek společné části maturitní zkoušky v jarním zkušebním období 2020 na 3. června 2020.

Záznamové archy didaktických testů s žákovským zápisem řešení byly hodnoceny ve shodném systému a se stejným programovým i technickým vybavením jako při hodnocení didaktických testů (DT) společné části maturitní zkoušky.

Celkem bylo ohodnoceno 2 663 záznamových archů didaktických testů, z nichž každý obsahoval 23 úloh, z toho bylo 11 úloh uzavřených a 12 úloh otevřených. Z těchto 12 otevřených úloh pak bylo 5 široce otevřených, v jejichž zadání byl požadavek zapsat i postup řešení, který byl také předmětem hodnocení.

Uzavřené úlohy byly hodnoceny strojově, informační systém rozlišil označení (zaškrtnutí) správné a nesprávné odpovědi.

Pro hodnocení otevřených úloh byly využity stejné principy i postupy jako při maturitní zkoušce. Vlastní hodnocení úloh probíhalo on-line v systému IS CERTIS. Každou otevřenou úlohu (výřez ze záznamového archu obsahující odpověď žáka) hodnotili nezávisle na sobě dva rateři. V případě jejich neshody úlohu přehodnotil tzv. superrater (vedoucí koordinující činnost raterů a dohlízející na správnost hodnocení). Objektivita hodnocení byla zachována – rater neviděl ani jméno, ani identifikační kód žáka, pouze výřez s úlohou.

Více než 40 tis. otevřených úloh (cca 71 tis. výřezů) hodnotilo 28 raterů. Koordinaci hodnocení a kontrolní činnost zajišťovali 3 superrateři.

3.7. OCENĚNÍ ŠKOL A ŽÁKŮ S NEJLEPŠÍMI VÝSLEDKY Z MATEMATIKY+ V SENÁTU

Počínaje školním rokem 2016/2017 proběhlo každoročně v Senátu Parlamentu ČR slavnostní ocenění studentů, kteří konali nepovinnou zkoušku MATEMATIKA+ a dosáhli v ní excelentních výsledků. Společně s nimi byli v roce 2017 oceněni i učitelé, kteří se podíleli na přípravě nejúspěšnějších tříd,

a v letech 2018 a 2019 byly oceněny školy, jejichž studenti se pravidelně účastní zkoušky ve větším počtu a dosahují velmi pěkných až excelentních výsledků.

V jednotlivých letech ocenění předávali senátoři Zdeněk Papoušek, Jiří Růžička a Jiří Drahoš společně se zástupci Jednoty českých matematiků a fyziků (JČMF) a Centra.

V roce 2020 se slavnostní ocenění studentů neuskutečnilo z důvodu epidemie Covid-19 a posunutí termínu zkoušky.

4 ANALYTICKÁ DATA

4.1. PŘIHLÁŠKY A VÝSLEDKY

V roce 2020 se k MATEMATICE+ (MA+) přihlásilo 3 419 maturantů, zkoušku pak následně konalo 2 663 z nich. Nejvíce přihlášených bylo z víceletých gymnázií – 1 463 (zkoušku pak konalo 1 172) a ze čtyřletých gymnázií (1 190 přihlášených, 914 konajících). MA+ je atraktivní i pro část maturantů z lyceí a středních technických škol skupiny 1.³ Žáci z ostatních oborů se k MA+ hlásí v malém počtu.

Tabulka obsahuje informace o počtu přihlášených, účasti a výsledcích podle vybraných skupin oborů vzdělání.

MA+ 2020		PŘIHLÁŠENÍ	KONALI	NEKONALI	NEUSPĚLI	USPĚLI	ČISTÁ NEÚSPĚŠNOST	PRŮMĚRNÝ %SKÓR
CELKEM		3 419	2 663	756	1 069	1 594	40,1	41,0
GY8	GYMNÁZIUM 8LETÉ	1 203	972	231	238	734	24,5	49,0
GY6	GYMNÁZIUM 6LETÉ	260	200	60	73	127	36,5	43,2
GY4	GYMNÁZIUM 4LETÉ	1 190	914	276	403	511	44,1	38,8
LYC	LYCEUM	243	200	43	125	75	62,5	30,6
ST1	SOŠ TECHNICKÉ SKUPINY 1	458	330	128	192	138	58,2	31,1
ST2	SOŠ TECHNICKÉ SKUPINY 2	11	8	3	6	2	75,0	26,5
SEK	SOŠ EKONOMICKÉ	12	5	7	5	–	100,0	12,0
SHP	SOŠ HOTELOVÉ A PODNIKATELSKÉ	4	2	2	2	–	100,0	22,0
SHU	SOŠ PEDAGOGICKÉ A HUMANITNÍ	3	2	1	2	–	100,0	13,0
SZE	SOŠ ZEMĚDĚLSKÉ	2	1	1	1	–	100,0	8,0
SZD	SOŠ ZDRAVOTNICKÉ	1	–	1	–	–	x	x
SUM	SOŠ UMĚLECKÉ	6	4	2	3	1	75,0	25,5
UTE	SOU TECHNICKÉ	23	23	–	17	6	73,9	24,3
UOS	SOU OSTATNÍ	2	1	1	1	–	100,0	26,0
NTE	NÁSTAVBOVÉ STUDIUM TECHNICKÉ	1	1	–	1	–	100,0	12,0
NOS	NÁSTAVBOVÉ STUDIUM OSTATNÍ	–	–	–	–	–	x	x

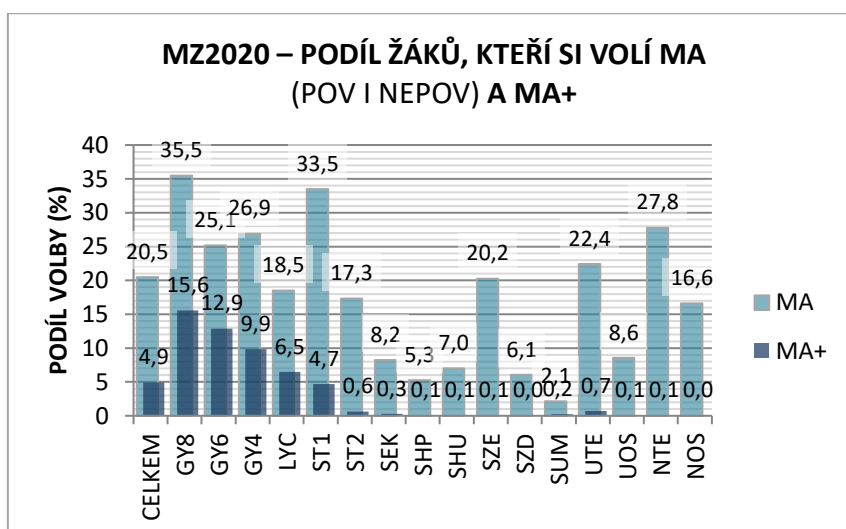
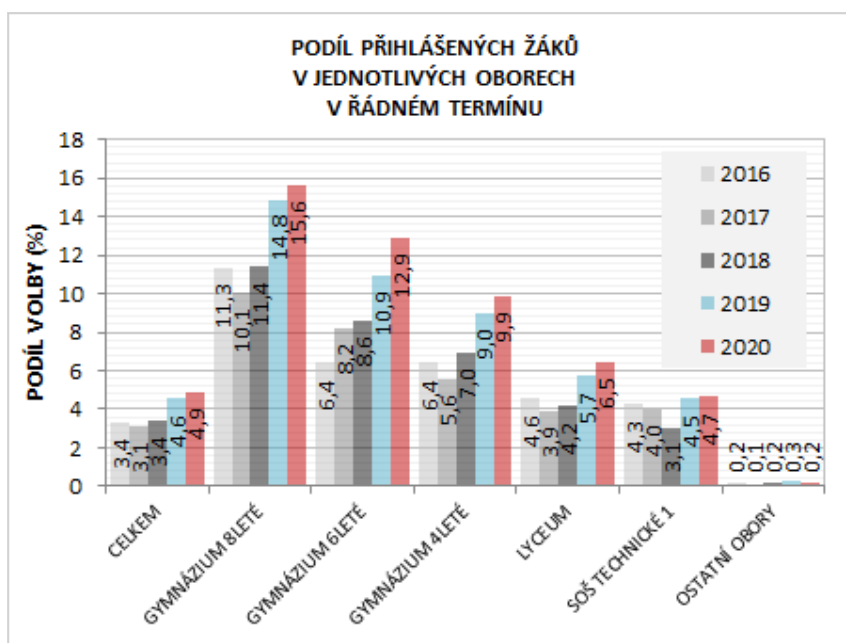
Pozn.: Pro časté chybné použití pojmu „průměrné úspěšnosti v %“, která bývá nesprávně interpretována jako doplněk „% neúspěšnosti“ do 100 %, je použit ekvivalentní pojem „% SKÓR“, což znamená průměrný dosažený výsledek v %.

³ Zařazení do jednotlivých skupin oborů vzdělání lze nalézt na adrese <https://vysledky.ceremat.cz/data/Default.aspx>

V roce 2020 se ke zkoušce přihlásilo 3 419 žáků, vybralo si ji tak 4,9 % maturujících. Je to nejvíce od roku 2015. V porovnání s předchozím rokem je to o 226 žáků více (nárůst o 7,1 %). Kladnou roli v meziročním nárůstu zájmu o zkoušku pravděpodobně sehrála informační kampaň cílená na střední i vysoké školy, díky které došlo k navýšení počtu fakult veřejných vysokých škol, které zkoušku zohledňují v rámci svého přijímacího řízení.

SČ MZ ŘÁDNÝ TERMÍN	POČET PŘIHL. K SČ MZ CELKEM	POČET PŘIHL. K MA+	PODÍL VOLBY V %
2015	74 701	1 923	2,6
2016	70 717	2 379	3,4
2017	69 817	2 167	3,1
2018	69 304	2 370	3,4
2019	69 777	3 193	4,6
2020	69 441	3 419	4,9

MATEMATIKU+ si nejčastěji volí žáci z osmiletých gymnázií, v roce 2020 se přihlásilo 15,6 % z nich. Oblíbená je i na šestiletých (12,9 %) a čtyřletých (9,9 %) gymnáziích. Z lyceí si ji volí 6,5 % maturantů, z oborů technických skupiny 1 pak 4,7 % maturantů. Zastoupení maturantů z ostatních oborů je nepatrné.



4.2. ZÁJEM ŠKOL

Největší zájem o zkoušku MATEMATIKA+ lze předpokládat zejména u těch žáků gymnázií a technických oborů, kteří se chystají ke studiu matematických, technických, ekonomických, chemických a některých dalších přírodovědných oborů na vysoké škole.

Ve školním roce 2019/2020 se ke zkoušce přihlásili žáci ze 406 středních škol, což představuje 37,0 % středních škol, jejichž žáci se přihlásili k řádnému termínu maturitní zkoušky. Nejvyšší podíl (78,7 %) v rámci oborů středního vzdělání zaujala osmiletá gymnázia, zkoušky se zúčastnili žáci z 200 z nich.

POČET ŠKOL	MA+ 2020	SČ MZ 2020	PODÍL V %
GY4	189	276	68,5
GY6	48	64	75,0
GY8	200	254	78,7
ST1+LYC	112	322	34,8
SŠ CELKEM	406	1096	37,0

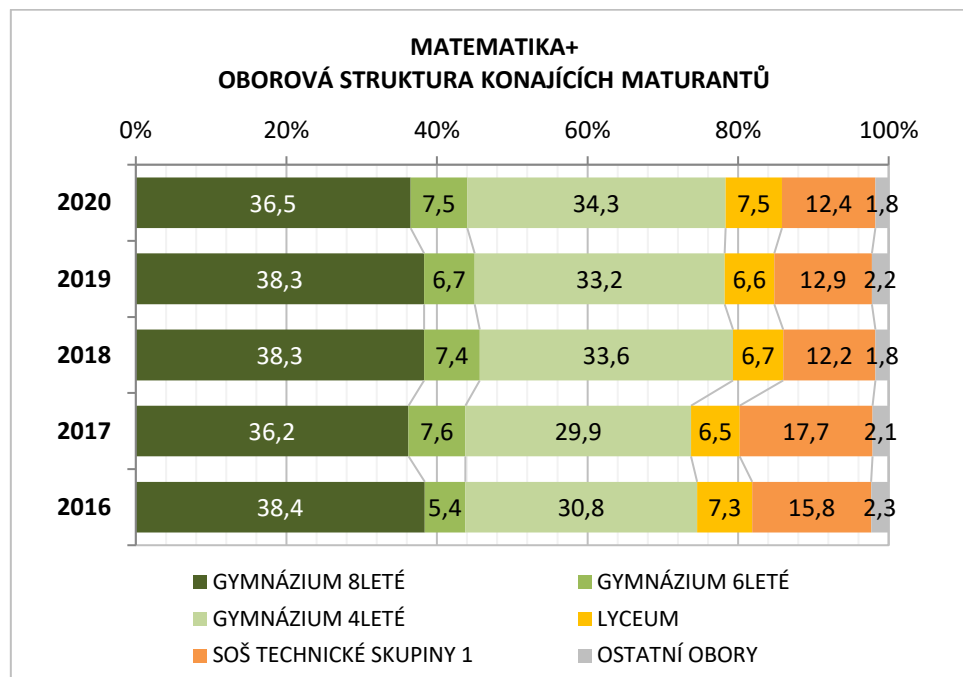
Největší zájem o zkoušku v absolutním počtu byl u žáků škol z Prahy, Jihomoravského a Středočeského kraje. Co se týká podílu přihlášených k MA+ na počtu přihlášených k řádnému termínu maturitní zkoušky, velký zájem byl kromě Prahy i v Královéhradeckém kraji, Jihomoravském kraji, Zlínském kraji, v Kraji Vysočina a v Libereckém kraji. Žáci z Prahy, Kraje Vysočina a Jihomoravského kraje patří dlouhodobě mezi ty, kteří dosahují nejlepších výsledků ve zkoušce z matematiky ve společné části maturitní zkoušky (SČ MZ).

KRAJ	POČET PŘIHLÁŠENÝCH ŽÁKŮ – MATEMATIKA+ 2020					POČET ŽÁKŮ – SČ MZ 2020	PODÍL ŽÁKŮ MA+ / SČ MZ 2020 (%)
	CELKEM	GYMNÁZIA A LYCEA	SOŠ	SOU	NÁSTAVBY		
HLAVNÍ MĚSTO PRAHA	822	714	102	6	–	11 366	7,2
JIHOČESKÝ	215	184	25	6	–	4 478	4,8
JIHOMORAVSKÝ	455	397	55	2	1	7 494	6,1
KARLOVARSKÝ	52	49	3	–	–	1 514	3,4
KRAJ VYSOČINA	168	137	31	–	–	3 295	5,1
KRÁLOVÉHRADECKÝ	230	191	39	–	–	3 724	6,2
LIBERECKÝ	125	72	52	1	–	2 526	4,9
MORAVSKOSLEZSKÝ	280	246	34	–	–	7 972	3,5
OLOMOUCKÝ	165	156	9	–	–	4 375	3,8
PARDUBICKÝ	158	112	46	–	–	3 504	4,5
PLZEŇSKÝ	96	86	9	1	–	3 567	2,7
STŘEDOČESKÝ	292	261	24	7	–	6 270	4,7
ÚSTECKÝ	106	97	9	–	–	4 883	2,2
ZLÍNSKÝ	255	194	59	2	–	4 473	5,7
CELKEM	3419	2896	497	25	1	69 441	4,9

4.3. REALIZACE ZKOUŠKY

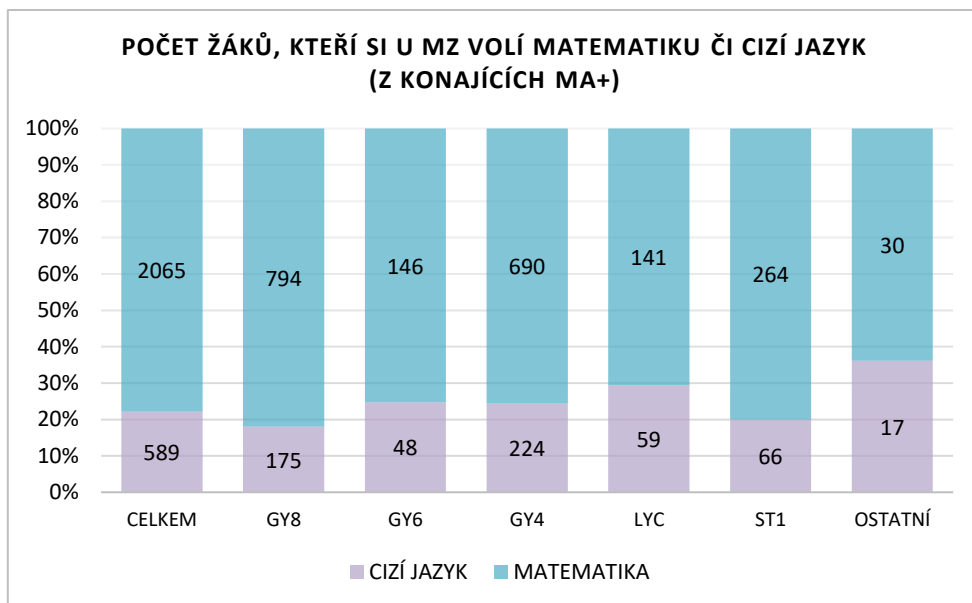
Zkoušku MA+ v roce 2020 konalo 2 663 žáků, průměrný procentní skóre bylo 41,0 % bodů. Nejvíce žáků bylo z osmiletých gymnázií – ke zkoušce jich přišlo 972, v této zkoušce byli i nejméně úspěšní – v průměru v testu dosáhli 49,0 % bodů. Druhá nejpočetnější skupina konajících byli žáci ze čtyřletých gymnázií, přišlo jich 914 a v průměru dosáhli 38,8 % bodů. Třetí nejpočetnější skupinou byli žáci ze skupiny technických oborů 1, kterých se ke zkoušce dostavilo 330, v průměru pak dosáhli 31,1 % bodů.

Zastoupení žáků z jednotlivých oborů, kteří zkoušku konali v letech 2016–2020, ukazuje následující graf:



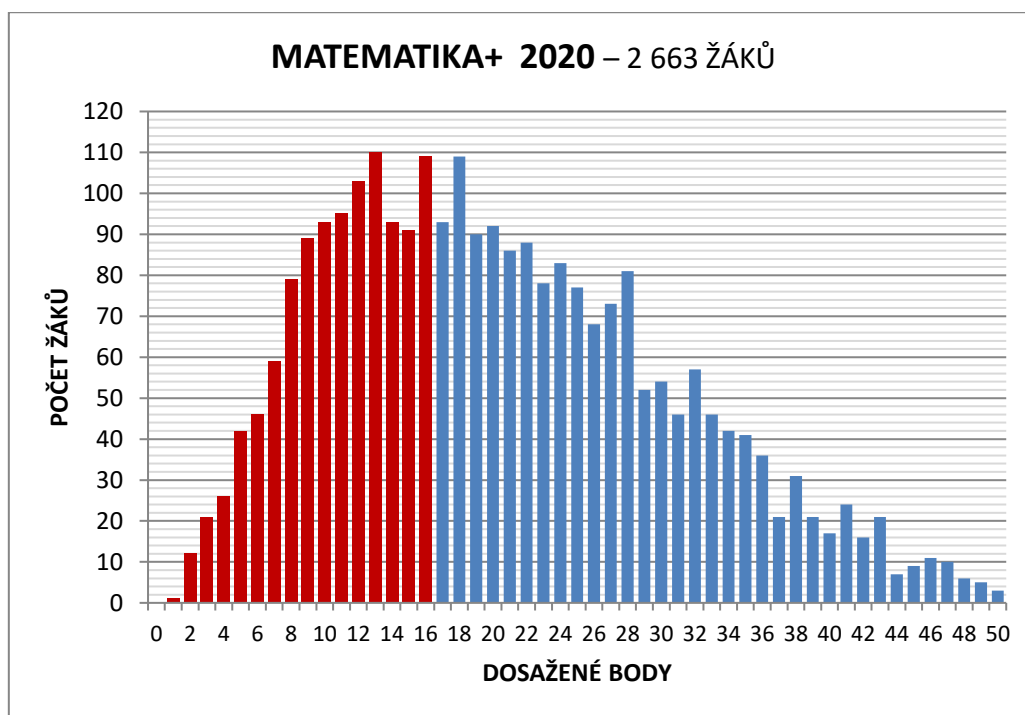
Zkoušku MATEMATIKA+ konalo 2 663 žáků, z toho si ve společné části MZ jako druhou povinnou zkoušku vybralo matematiku 2 065 žáků, 589 žáků si zvolilo cizí jazyk a 9 žáků druhou povinnou zkoušku nekonalo.⁴

⁴ Druhou povinnou zkoušku SČ MZ nekonají např. žáci dvojjazyčných gymnázií.



4.4. ROZLOŽENÍ VÝSLEDKŮ

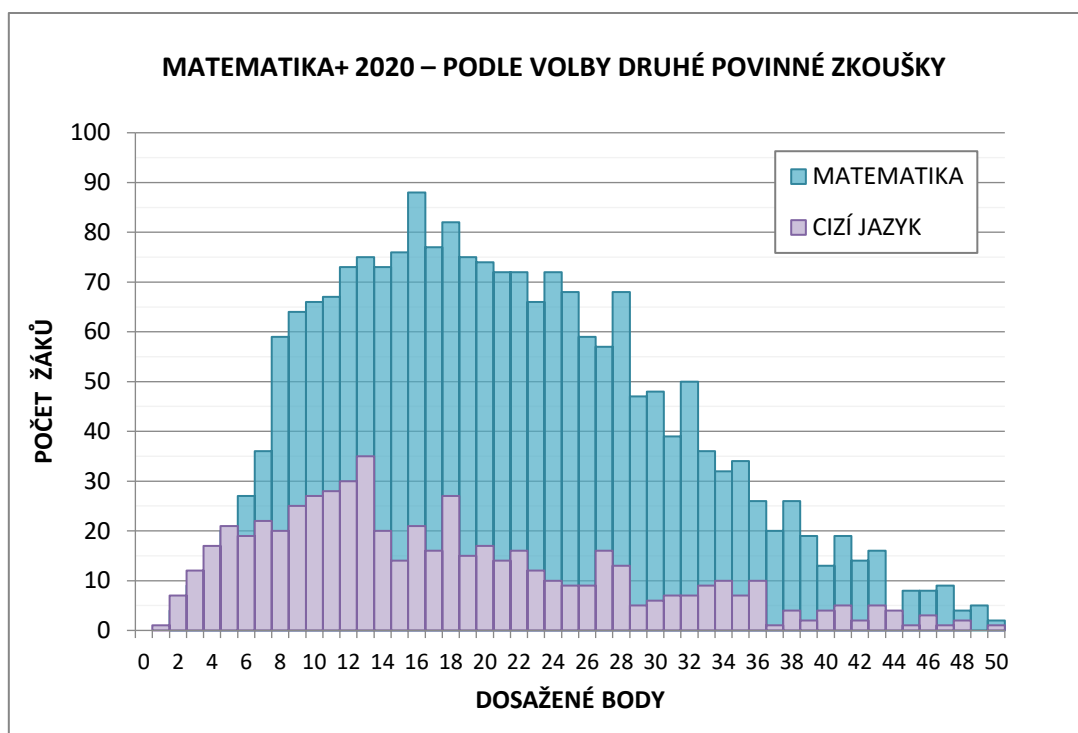
Z histogramu je patrné, že didaktický test velmi dobře diskriminuje. Jednoznačně lze rozlišit stupeň dosažených vědomostí a dovedností žáků. Ve zkoušce neuspělo 1 069 žáků, tj. 40,1 % všech konajících.



Test mj. obsahuje několik široce otevřených úloh, tedy nevyhýbá se ani hodnocení produktivních dovedností žáků. Cut-off score testu je nastaveno na 33 %, tj. 17 bodů (v grafu jsou červeně označeni neúspěšní žáci). Náhodný skór testu⁵ je nízký (okolo 10 %) a reliabilita vysoká (84,5 %).

Jednotliví žáci mohou mít velice odlišnou motivaci k tomu, aby se účastnili zkoušky MATEMATIKA+. Zatímco někteří žáci se snaží o výtečné výsledky, aby naplnili požadavky prestižních oborů vysokých škol (včetně zahraničních) nebo dosáhli na jednorázová stipendia určená vynikajícím absolventům středních škol, dalším žákům stačí překročit minimální hranici úspěšnosti (známka 4), aby se případně vyhnuli přijímací zkoušce na některou z vysokých škol.

Rozložení výsledků ve zkoušce MATEMATIKA+ a zastoupení žáků podle volby druhé zkoušky je následující:



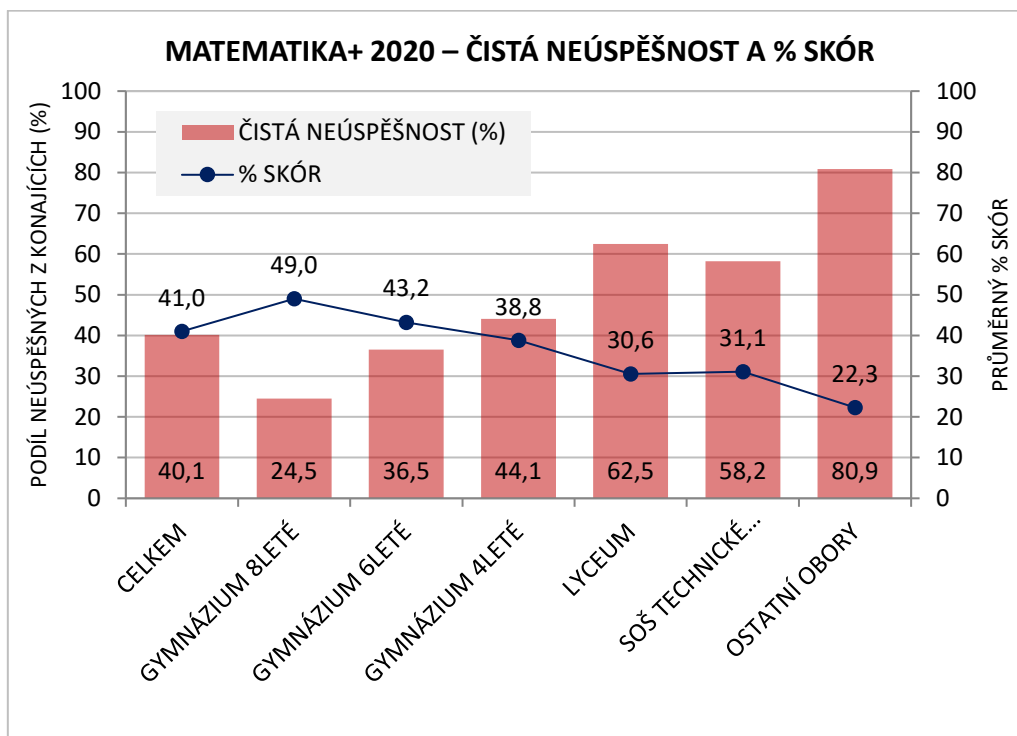
Z grafu je mj. patrné, že někteří žáci výteční v matematice si v rámci společné části MZ vybírají zkoušku z cizího jazyka a své kvality v matematice pak přesvědčivě doloží výsledkem ve zkoušce MATEMATIKA+. Větší skupina žáků, kteří si ve společné části vybírají cizí jazyk a ve zkoušce MATEMATIKA+ dosahují slabších až velmi slabých výsledků, výběrovou zkouškou MATEMATIKA+ u maturit nic neriskuje.

4.5. VÝSLEDKY PODLE STUDIJNÍCH OBORŮ

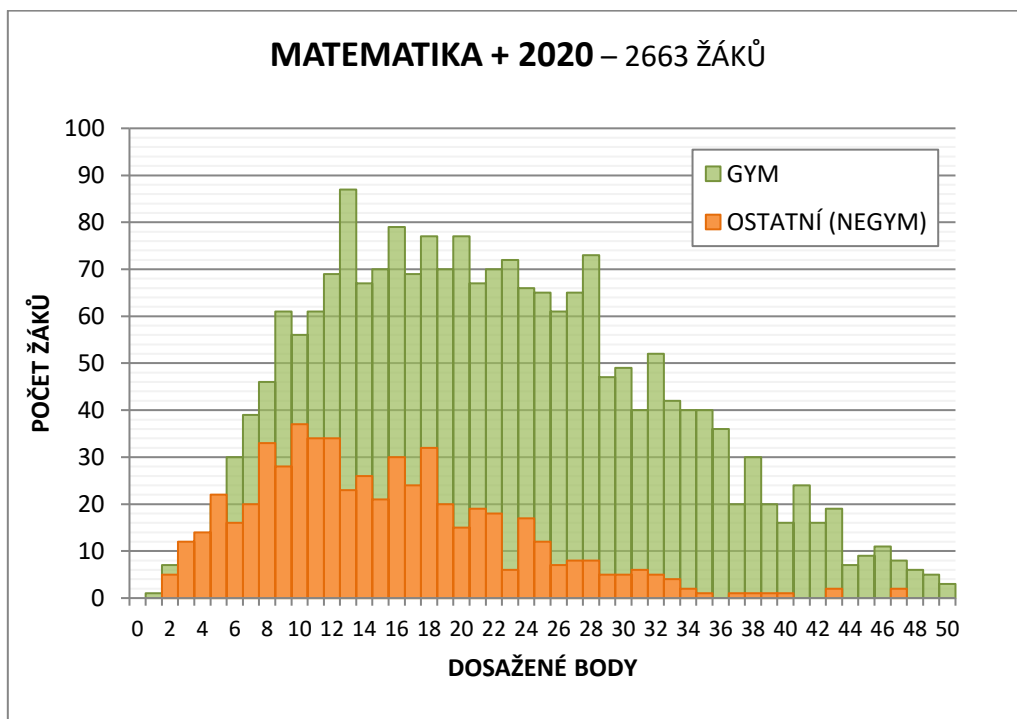
Ze zúčastněných žáků uspěli podle očekávání nejlépe absolventi gymnázií, žáci lyceí a středních odborných škol technických za nimi zaostávají. Absolventi ostatních středních škol na zkoušku prakticky nedosáhnou. Přesto nezanedbatelná část z nich míří na vysoké školy s technickým a ekonomickým

⁵ Náhodný skór testu je počet bodů (vyjádřený v % z max. počtu bodů), které lze v průměru získat za test pouze prostým hádáním (tedy s nulovou znalostí).

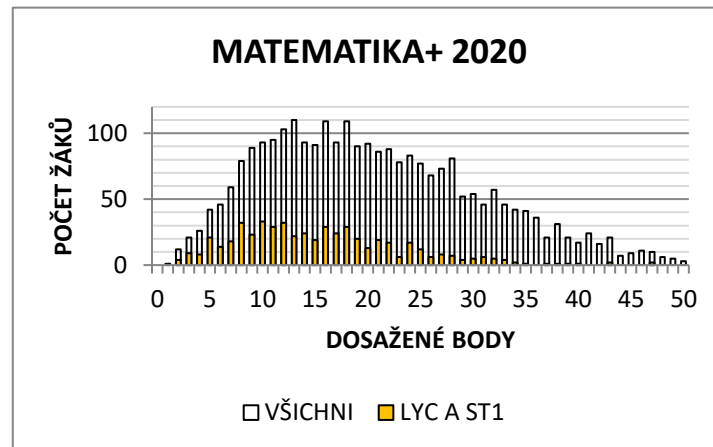
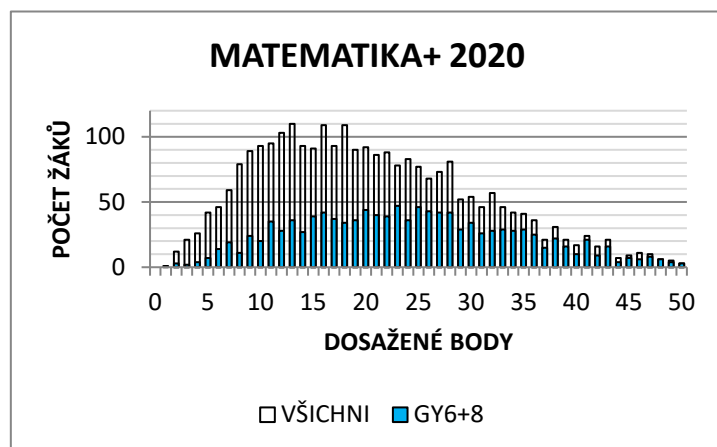
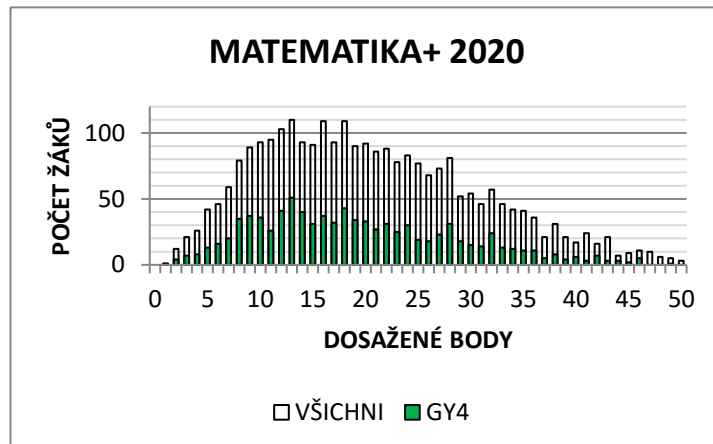
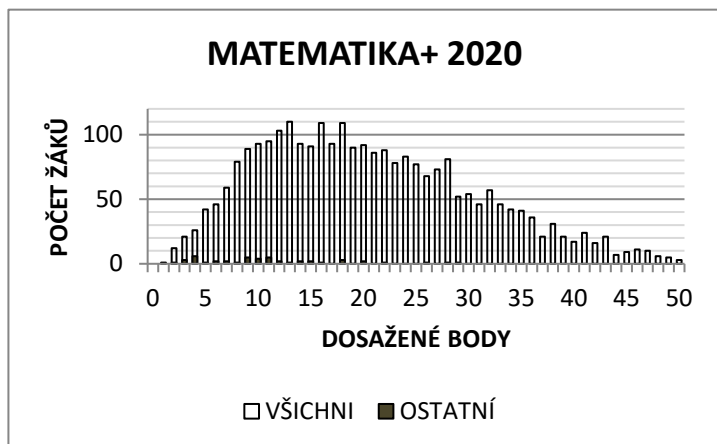
zaměřením. Graf zobrazuje průměrné hodnoty dosaženého % skóru a čistou neúspěšnost (podíl počtu neúspěšných z počtu konajících).



Následující graf zobrazuje výsledky gymnazistů a výsledky žáků z ostatních oborů středních škol. Mezi nejlepšími řešiteli MA+, kteří získali 49–50 bodů, je v roce 2020 jen 8 žáků, a to z gymnázií.



V následujících grafech lze sledovat rozložení výsledků čtyř základních skupin oborů vzdělání – čtyřletá gymnázia (GY4), víceletá gymnázia (GY8 a GY6), lycea a technické školy 1 (LYC a ST1) a ostatní školy.



4.6. ZNÁMKOVÁNÍ

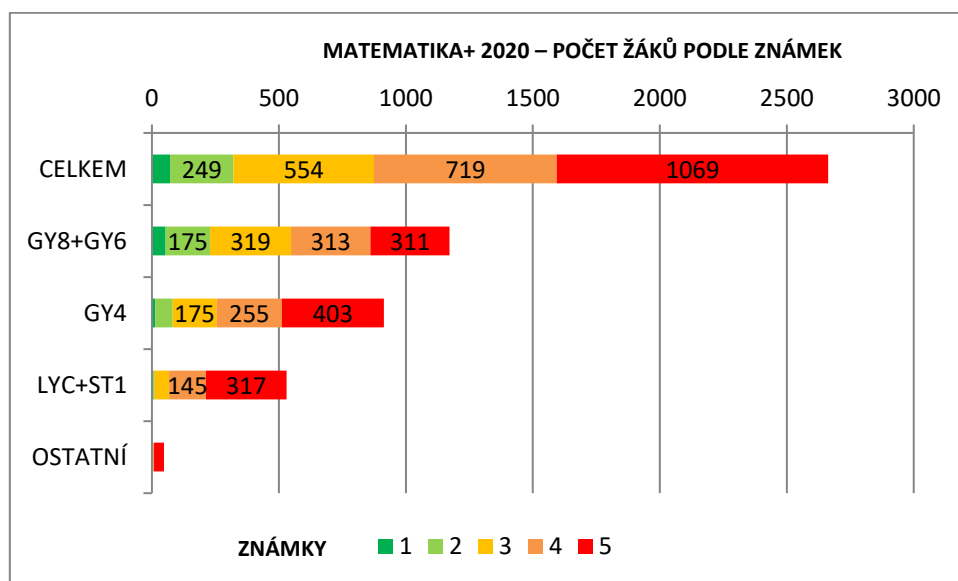
Známka⁶ 1 nebo 2 v MATEMATICE+ garantuje vysokou úroveň vědomostí a dovedností ve středoškolské matematice. S tímto výsledkem lze s vysokou pravděpodobností předpokládat úspěšné studium na vysoké škole, a to nejen technicky zaměřené. Většinou i známka 3 v MA+ je spolehlivější zárukou úspěšného studia na vysoké škole než lepší známka z matematiky v rámci druhé povinné zkoušky společné části maturit.

ROZLOŽENÍ ZNÁMEK PODLE OBORU

Následující tabulka a graf ukazují rozložení známek mezi maturanty jednotlivých skupin oborů vzdělání.

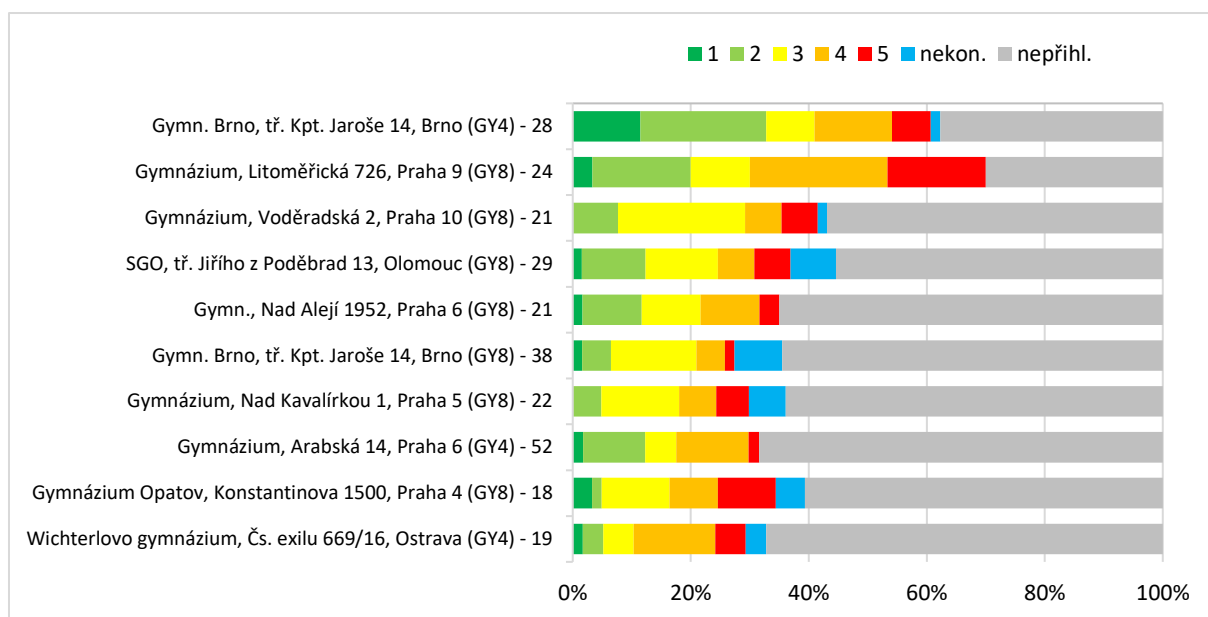
MA+ 2020	ZNÁMKY – PODÍLY					KONALI ZKOUŠKU
	1	2	3	4	5	
CELKEM	2,7%	9,4%	20,8%	27,0%	40,1%	2 663
GY8+GY6	4,6%	14,9%	27,2%	26,7%	26,5%	1 172
GY4	1,5%	7,3%	19,1%	27,9%	44,1%	914
LYC+ST1	0,8%	1,3%	10,8%	27,4%	59,8%	530
OSTATNÍ	0,0%	0,0%	6,4%	12,8%	80,9%	47

Nejvíce jedniček získali žáci víceletých gymnázií, kde bylo i nejméně neúspěšných. Nejméně úspěšní jsou žáci z jiných oborů než gymnázií, lyceí a ST1, z nichž nejlepší dosáhnou pouze na známku 3.



V následující tabulce jsou uvedeny střední školy s nejvyšším podílem žáků dosahujících alespoň dobrých výsledků (známky 1, 2 a 3) ve zkoušce MATEMATIKA+. 100 % v grafu představuje celkový počet žáků daného oboru školy přihlášených k maturitě ve společné části (dá se předpokládat, že až na malé výjimky je totožný s počtem žáků posledního ročníku). V grafu vedle názvu školy je uveden počet žáků přihlášených k MATEMATICE+ v dané škole.

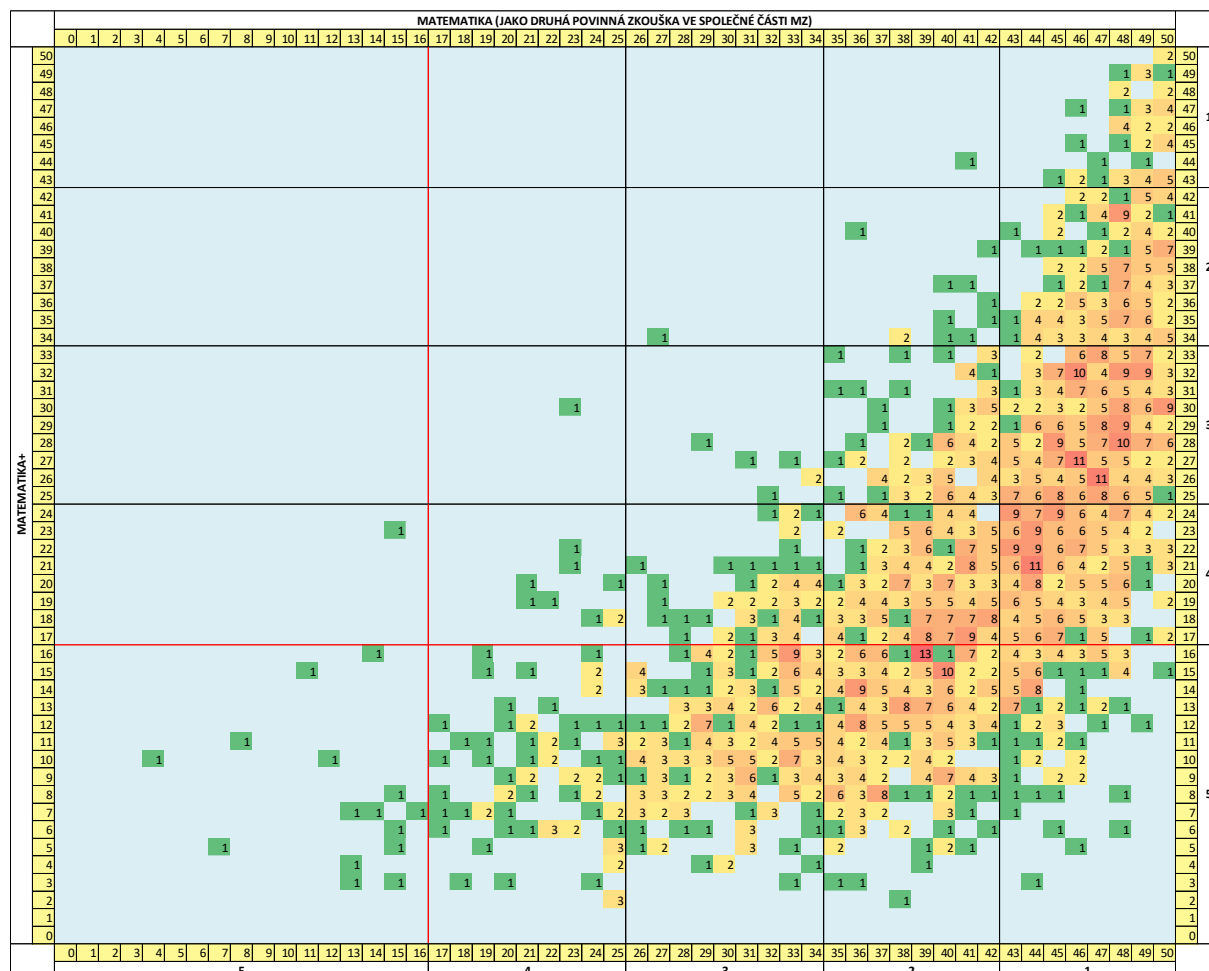
⁶ Žák ve zkoušce uspěje, dosáhne-li alespoň 33 % maximálního možného skóru. Zámka 3 je od 50 % výše, známka 2 od 68 % výše a k získání známky 1 je třeba získat nejméně 86 % maximálního možného skóru.



OBOR	ŠKOLA	PŘIHLÁŠENÍ K MA+
GY8	Gymnázium, Nad Kavalírkou 1, Praha 5	22
GY4	Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše 14, Brno	28
GY8	Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše 14, Brno	38
GY8	SGO, tř. Jiřího z Poděbrad 13, Olomouc	29
GY8	Gymnázium, Praha 6, Nad Alejí 1952, Praha 6	21
GY4	Gymnázium, Arabská 14, Praha 6	52
GY8	Gymnázium Opatov, Konstantinova 1500, Praha 4	18
GY8	Gymnázium, Litoměřická 726, Praha 9	24
GY8	Gymnázium, Voděradská 2, Praha 10	21
GY4	Wichterlovo gymnázium, Čs. exilu 669/16, Ostrava	19

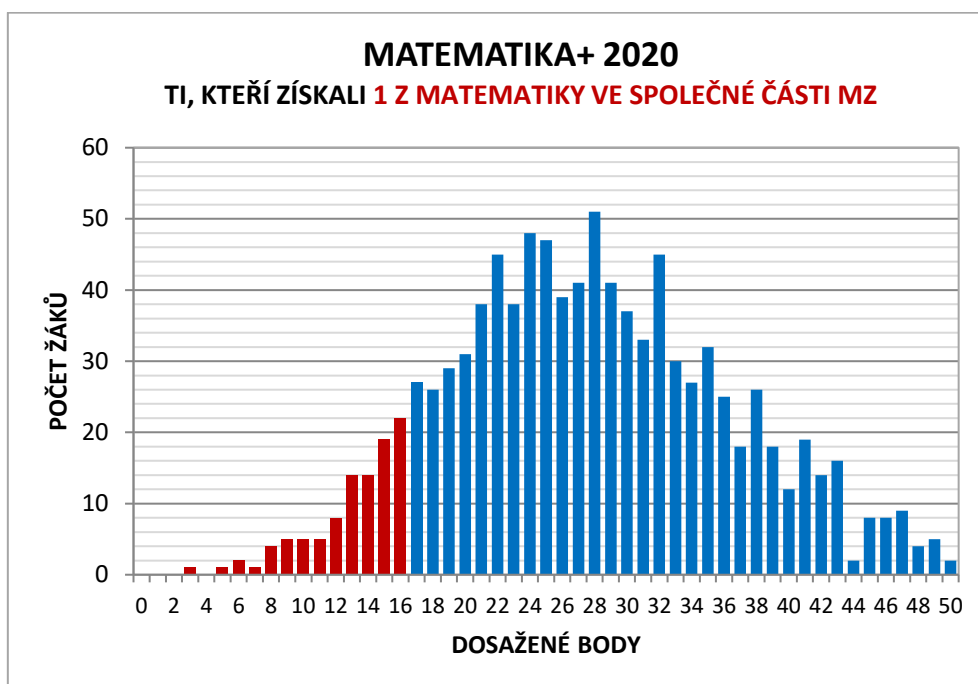
POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ VE ZKOUŠCE MATEMATIKA+ A V MATEMATICE VE SPOLEČNÉ ČÁSTI MZ

Zkoušku MA+ konalo 2 663 žáků, z toho 2 065 si ve společné části maturitní zkoušky zvolilo jako druhou povinnou zkoušku matematiku. V následujícím grafu jsou komplexně porovnávány známky v MATEMATICE+ a matematice ve společné části MZ.



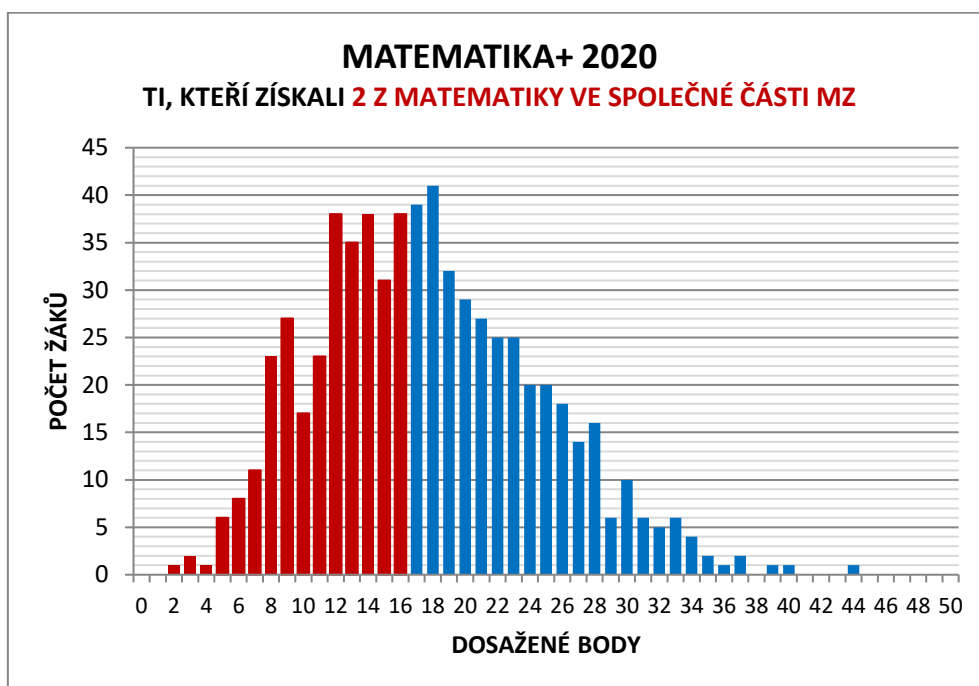
Čísla 0–50 po obvodu grafu představují počty bodů z obou testů. Na vodorovné ose jsou výsledky z matematiky ve společné části MZ, na svislé ose z MATEMATIKY+. Označení skupin 1–5 představuje známky přidělené příslušnému počtu bodů v testu. Čísla uvnitř jednotlivých pozic v grafu představují počty maturantů s příslušnou kombinací počtu získaných bodů v obou testech. Známky v MATEMATICE+ jsou v průměru o 2 stupně horší než v matematice ve společné části. Nicméně rozptyl známek je tak výrazný, že pokus o přepočítávání individuálních výsledků v obou zkouškách pozbývá jakýkoli smysl.

Pro ilustraci lze poukázat na rozdíly žáků ve výsledcích v MATEMATICE+ ve skupině žáků, kteří **ve společné části MZ získali z matematiky známku 1**.



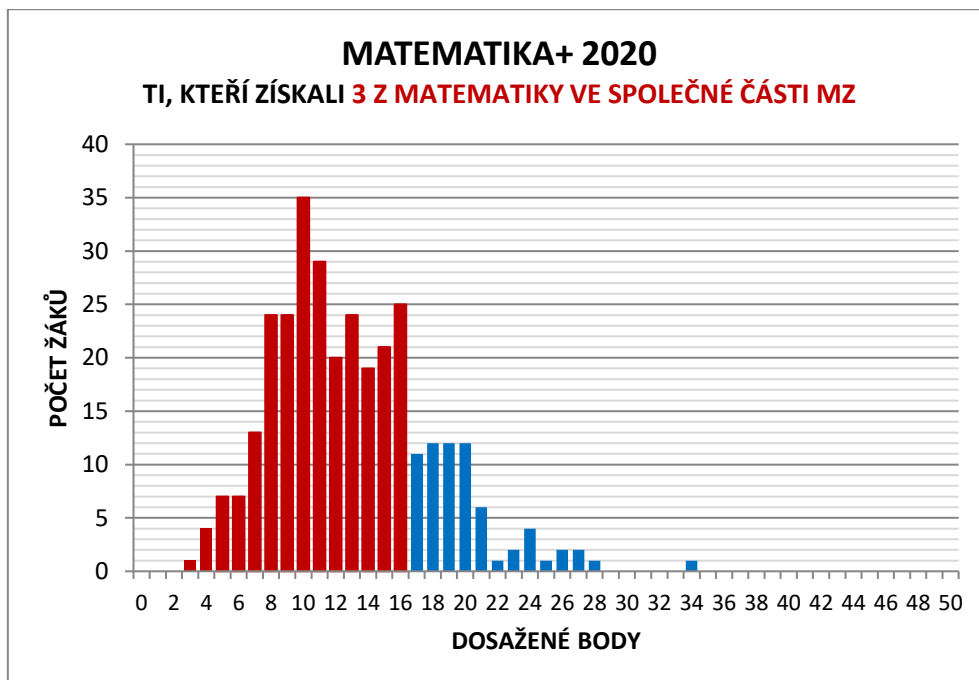
V didaktickém testu MATEMATIKA+ se výsledky sledované skupiny (992 žáků se známkou 1 z matematiky ve společné části MZ) rozložily od 3 získaných bodů v MA+ až k 50 bodům. Průměrná úspěšnost v MA+ v této skupině byla 55,1 %, což odpovídá spodní hranici známky 3. Celkem 282 žáků s výborným výsledkem z matematiky ve společné části MZ mělo v MATEMATICE+ pouze výsledek dostatečný (dosáhli 17–24 bodů) a 101 žáků (10,2 % z počtu žáků konajících jak zkoušku z matematiky ve společné části, tak MA+) bylo u zkoušky MA+ neúspěšných. Výborný výsledek z matematiky ve společné části MZ tedy nezaručuje kvalitní výsledek v MATEMATICE+ a nelze z něho ani usuzovat, je-li žák dobře připraven ke studiu matematiky na vysoké škole, či nikoli. Výborný výsledek ve společné části MZ garantuje pouze velmi dobré osvojení vědomostí v matematice na základní úrovni.

V následujícím grafu je rozložení výsledků z MATEMATIKY+ u skupiny žáků, kteří ve **společné části MZ** získali z matematiky známku 2.



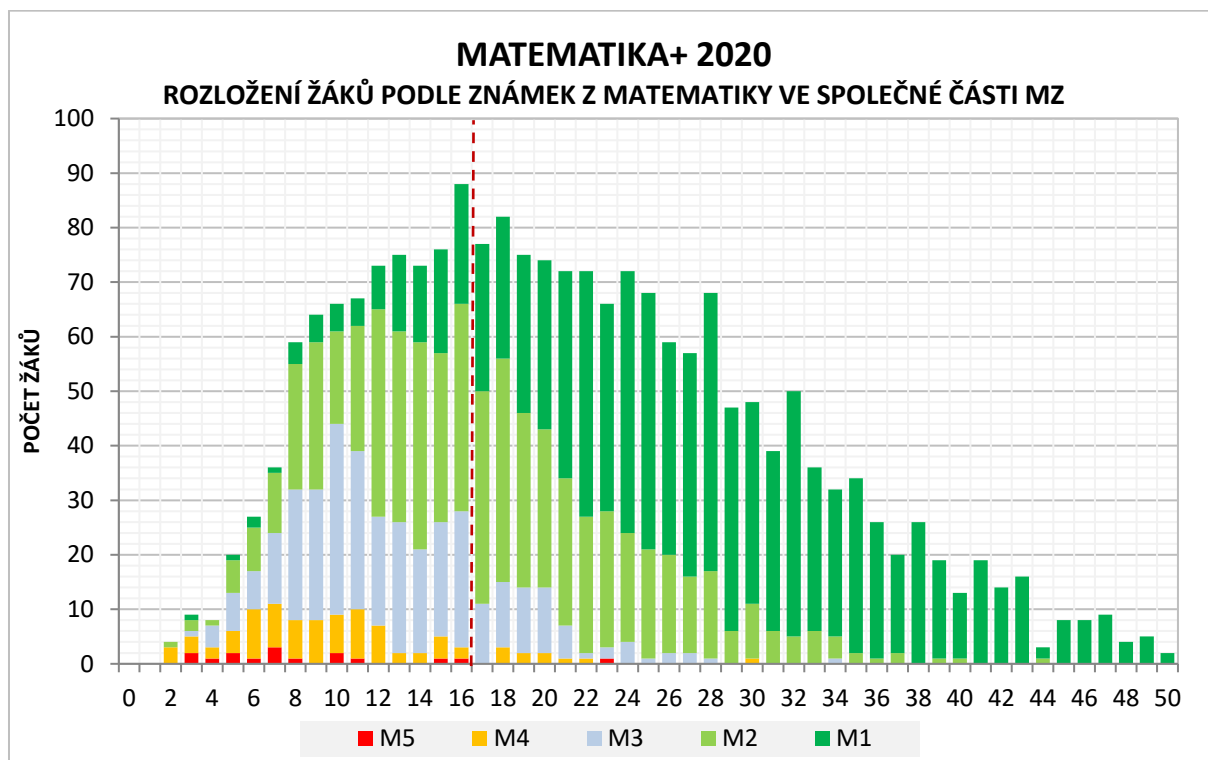
V této skupině (650 žáků) je průměrná úspěšnost v MATEMATICE+ 35,5 %, což odpovídá u této zkoušky spodní hranici známky 4. Téměř polovina žáků této skupiny (46,0 %) v MA+ neuspěla.

V následujícím grafu je rozložení výsledků z MATEMATIKY+ u skupiny žáků, kteří ve **společné části MZ** získali z matematiky známku 3.

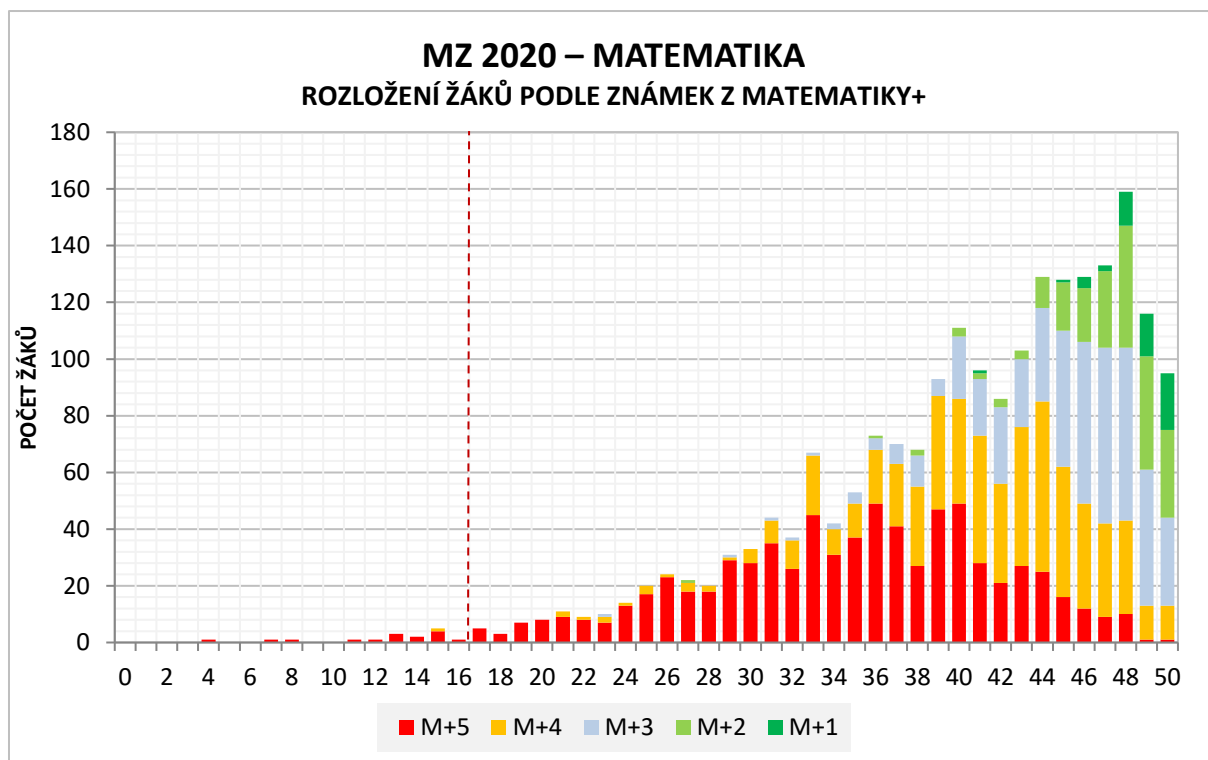


Průměrná úspěšnost těchto 320 žáků u zkoušky MA+ je 25,9 %, což je o 7 procentních bodů pod cut-off score (33 %) testu MATEMATIKA+. Neuspělo 79,1 % žáků této skupiny.

U skupiny žáků, kteří konali obě zkoušky (MATEMATIKU+ i matematiku ve společné části MZ), můžeme zobrazit výše uvedené vazby mezi známkou z matematiky a výsledkem v MATEMATICE+ komplexně.



Pro dokreslení uvádíme ještě opačnou závislost, tedy výsledky v matematice ve společné části MZ v závislosti na známkách v MATEMATICE+ (známky 1–5).



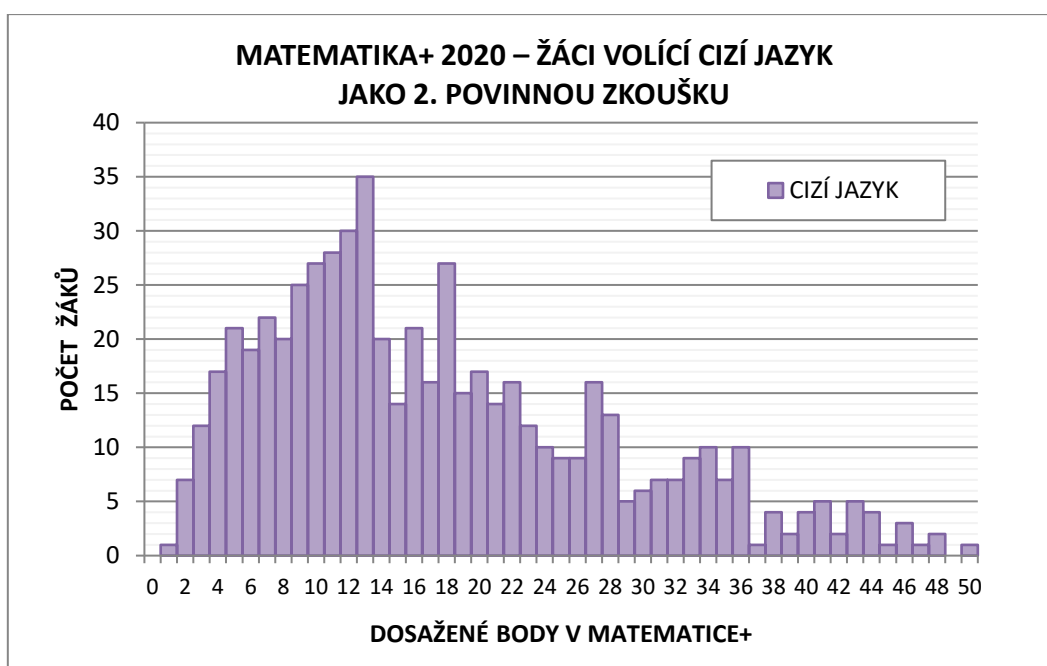
Známka 1 nebo 2 v MATEMATICE+ ve většině případů garantuje výtečný výsledek v matematice ve společné části MZ. V MA+ bylo 55 žáků ohodnoceno známkou 1, ve zkoušce z matematiky pak 54 z nich

získalo stejnou známku. Na známku 2 v MATEMATICE+ dosáhlo 203 žáků, z nich 191 mělo v matematice lepší známku, tedy známku 1.

Mezi trojkaři v MATEMATICE+ (472 žáků) přes 77 % dosáhne v matematice ve společné části MZ na známku 1 (364 žáků) a téměř všichni zbývající žáci mají známku 2 (101). I největší část skupiny žáků se známkou 4 v MATEMATICE+ (590) uspěla v testu z matematiky ve společné části MZ téměř o dva stupně lépe a 48 % žáků této skupiny dosáhlo v matematice ve společné části dokonce na známku 1. Z ostatních známek byly známky 2 a 3 daleko četnější než známka 4.

Ze 745 žáků, kteří v MATEMATICE+ neuspěli, 101 žáků získalo v matematice ve společné části známku 1. Ze všech žáků konajících MATEMATIKU+ pouze 15 žáků v matematice ve společné části MZ neuspělo. V Matematice+ neuspěl několikanásobně vyšší počet žáků.

Předcházející grafy neobsahují výsledky z MATEMATIKY+ těch žáků, kteří si jako druhou povinnou zkoušku ve společné části MZ vybrali cizí jazyk a zkoušku z matematiky nekonali. I mezi těmito 589 žáky je nezanedbatelná část s výtečnými výsledky v MATEMATICE+.



4.7. PROČ DOBRÁ ZNÁMKA Z MATEMATIKY VE SPOLEČNÉ ČÁSTI MZ NEMUSÍ GARANTOVAT DOBRÉ STUDIJNÍ VÝSLEDKY NA VŠ

Požadavky k matematice ve společné části MZ jsou průnikem požadavků všech maturitních oborů, mj. i oborů skupiny L0 („učební“ obory s maturitou) a oborů nástavbového studia (skupina oborů L5).

MATEMATIKA+, která je výběrovou zkouškou, naopak obsahuje standardní požadavky pro uchazeče o studium technických oborů vysokých škol.

[Katalog požadavků k MATEMATICE+](#) obsahuje kromě všech požadavků z katalogu k matematice ve společné části MZ i učivo navíc (viz Kapitola 2 – Obsahová část). Úvodní oddíl kompetencí u MA+ v části *Osvojení matematických pojmů a dovedností* obsahuje navíc *Dokázat jednoduchou matematickou větu, vytvořit, ověřit, zdůvodnit nebo vyvrátit hypotézu*.

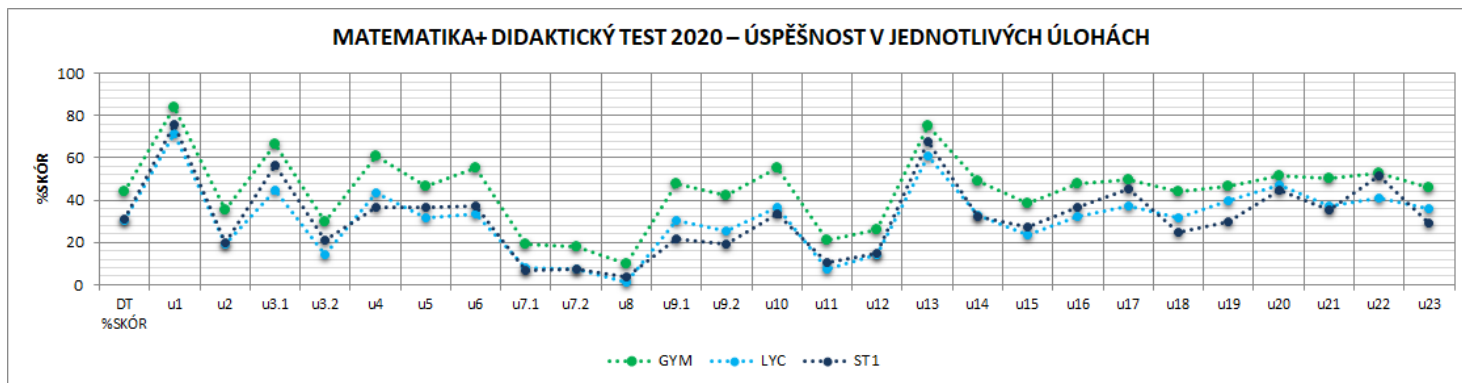
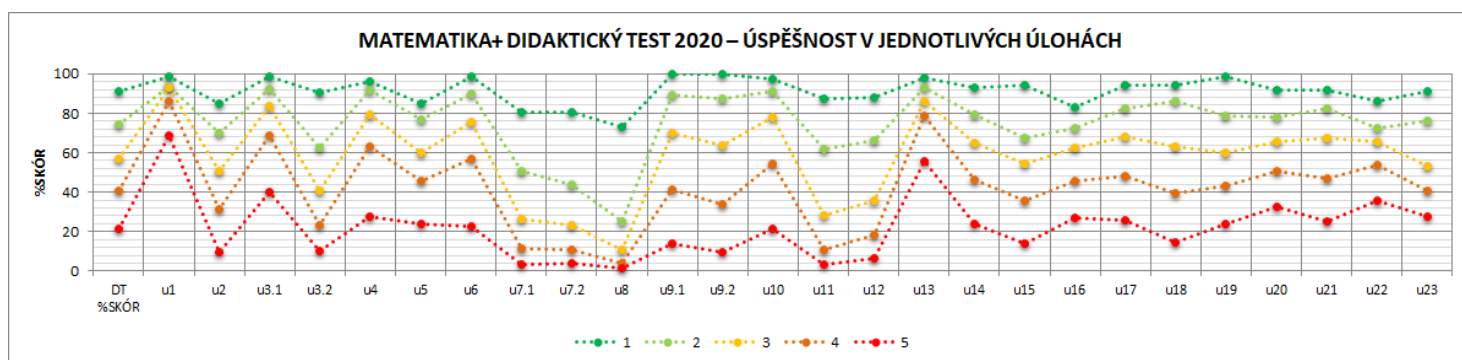
Žáci, kteří vykonali úspěšně zkoušku z matematiky společné části MZ, nemuseli být s uvedenými oblastmi učiva vůbec seznámeni.

4.8. DIDAKTICKÝ TEST MATEMATIKA+

V testu jsou zastoupeny úlohy ze všech tematických celků, které jsou předmětem středoškolské výuky (číselné množiny, algebraické výrazy, rovnice a nerovnice, funkce, posloupnosti, planimetrie, stereometrie, analytická geometrie, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika). Do didaktického testu bylo zařazeno i několik úloh, jejichž řešení předpokládá nejen velmi dobré osvojení učiva, ale i schopnost matematicky přemýšlet. Úlohy v testu mají tedy různou obtížnost – jsou zde úlohy základní úrovně obtížnosti, většina úloh je standardní obtížnosti a nejmenší počet úloh je nadstandardní obtížnosti. Tyto úlohy jsou určeny nadanějším studentům, tedy rozlišují od ostatních ty žáky, kteří získají z testu MATEMATIKA+ výslednou známku 1.

Test obsahuje 12 otevřených úloh (úlohy 1–12), za něž lze získat 25 bodů z 50 možných.

Následující graf zobrazuje průměrné úspěšnosti jednotlivých úloh v pěti skupinách žáků rozdělených podle známek (1–5) za test jako celek. Ve druhém grafu jsou žáci rozděleni podle oboru střední školy.

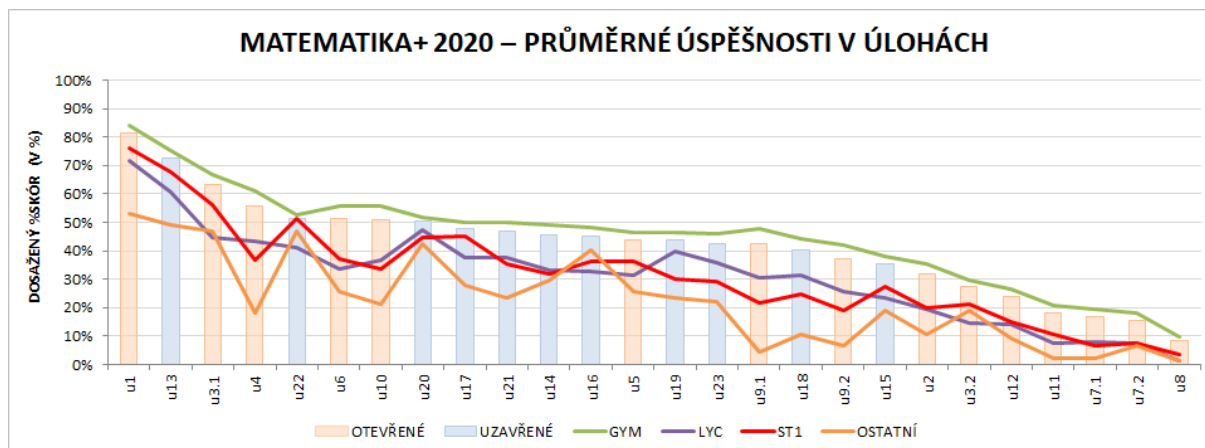


V prvním z obou grafů lze prokázat vysokou diskriminaci úloh. Nejlépe diskriminují otevřené úlohy 4, 6, 9 a 10. Prakticky ve všech úlohách se u jednotlivých skupin průměrné úspěšnosti v úlohách liší. Je patrné, že pro výtečné žáky jsou dostupné všechny úlohy a žáci se slabými výsledky zaostávají v každém z tematických celků.

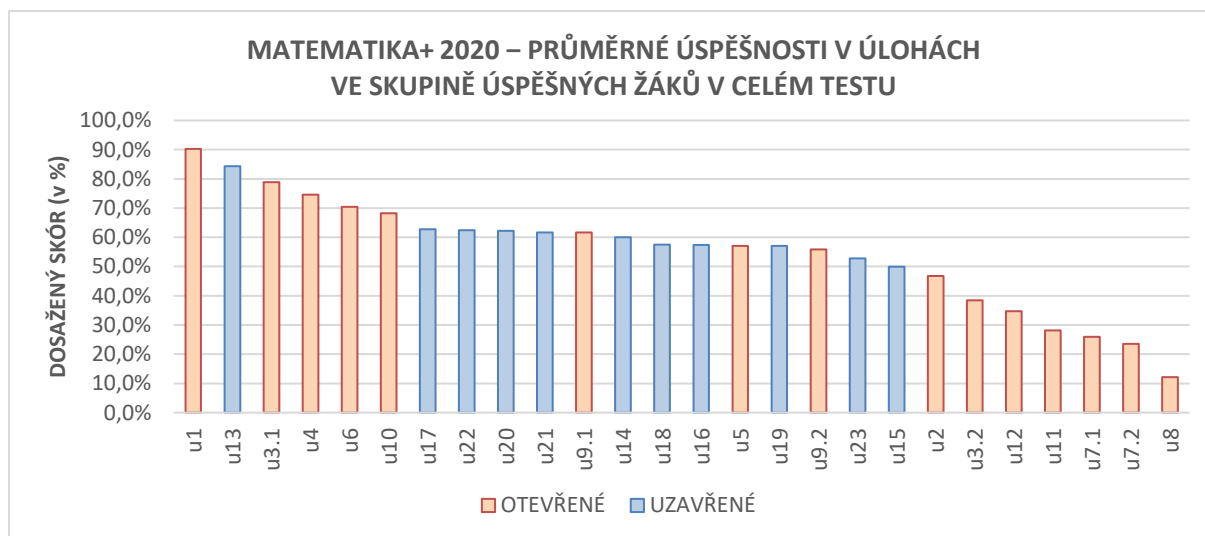
Dobrý výsledek ve zkoušce MATEMATIKA+ garantuje požadovanou úroveň uchazeče o studium kteréhokoli technického oboru na vysoké škole. Příprava takového uchazeče musí být mnohem robustnější než příprava středoškoláka ke zkoušce z matematiky ve společné části maturit, a to minimálně v souvislosti s širší škálou požadavků ve všech tematických celcích, jak již bylo výše uvedeno.

4.9. UKÁZKY ÚLOH S KOMENTÁŘEM A VÝSTUPY Z POLOŽKOVÉ ANALÝZY

V následujícím grafu jsou uvedeny průměrné úspěšnosti, kterých v jednotlivých úlohách dosáhli žáci ve čtyřech oborových skupinách: gymnázium (zkoušku konalo 2 086 žáků), lyceum (200 žáků), technické obory středních odborných škol 1 (330 žáků) a ostatní (47 žáků). Úlohy jsou seřazeny sestupně podle průměrné úspěšnosti všech účastníků.



Barevně jsou odlišeny otevřené a uzavřené úlohy. K nejlépe řešeným úlohám (úspěšnost přes 50 %) patřily otevřené úlohy 1, 3.1, 4, 6 a 10 a tři uzavřené úlohy 13, 22 a 20.



Sledujeme-li průměrné úspěšnosti v úlohách ve skupině žáků úspěšných v celém testu (známka 1–4), pak se k úlohám s úspěšností vyšší než 60 % řadí ještě otevřená úloha 9.1 a uzavřené úlohy 17, 21 a 14.

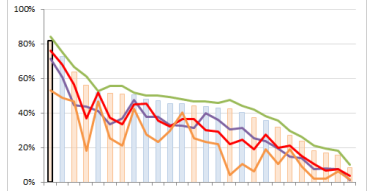
V následující části jsou uvedeny stručné komentáře k jednotlivým úlohám, průměrné úspěšnosti u žáků daných oborových skupin a graf porovnávající obtížnosti úloh v testu s tmavě vyznačenou průměrnou úspěšností sledované úlohy.

1 bod

- 1 Pro $a \in (0; +\infty)$ a $n \in \mathbf{N}$ zjednodušte (výraz nesmí obsahovat závorky):

$$\sqrt{(a^{4n})^9} =$$

Tematický celek		Algebraické výrazy			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	84,04%	71,50%	76,06%	53,19%	81,56%



Na začátku testu byla již tradičně umístěna úloha základní úrovně obtížnosti z tematického celku Algebraické výrazy. Velmi jednoduchá úloha ověřuje schopnost aplikovat základní vzorce pro úpravu mocnin. Řešení by mělo být žákům dostupné již po absolvování 1. ročníku střední školy, a to i bez použití matematických tabulek. Úlohu by bylo možné zařadit rovněž do didaktického testu z matematiky ve společné části maturit. Úlohu proto vyřešila i většina žáků (70 %), kteří byli v testu jako celku neúspěšní.

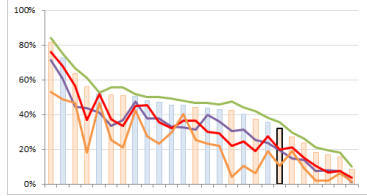
1 bod

- 2 Je dán výraz:

$$\frac{\log_3 9^x}{\log_3 (x-9)}$$

Určete všechny hodnoty $x \in \mathbf{R}$, pro něž má výraz smysl.

Tematický celek		Funkce			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	35,38%	19,50%	20,00%	10,64%	31,84%



Úzce otevřená úloha má relativně nízkou průměrnou úspěšnost. Přesto jde z hlediska požadavků o úlohu v základní úrovni obtížnosti. Řešení nepředpokládá hlubší úvahu, ale jen správné stanovení definičního oboru funkce logaritmus a vyloučení té hodnoty argumentu, pro kterou je hodnota logaritmu ve jmenovateli nulová. Úloha velmi pěkně rozlišuje skupiny žáků se známkami 1–5 z celého testu. V dané úloze by měli mít žáci mnohem větší jistotu, a to zejména ti, kteří budou matematiku potřebovat na vysoké škole.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 3

V dílně se pracuje na dvou strojích.

Na prvním stroji se za určitou dobu vyrobí n výrobků, zatímco na druhém stroji se za dobu o třetinu delší vyrobí $2n$ výrobků.

Na **obou** strojích se za p hodin vyrobí dohromady $10n$ výrobků.

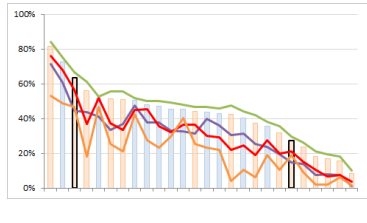
(CZVV)

max. 2 body

3

- 3.1 Vypočtete, kolikrát více výrobků se za stejnou dobu vyrobí na druhém stroji než na prvním stroji.
- 3.2 V závislosti na p vyjádřete, za kolik hodin se $10n$ výrobků vyrobí jen na prvním stroji.

Tematický celek		Algebraické výrazy				
úspěšnost		Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	3.1	66,73%	44,50%	56,36%	46,81%	63,42%
	3.2	29,53%	14,50%	21,21%	19,15%	27,19%



V úloze jsou aplikovány postupy, které se před zavedením RVP ZV procvičovaly již na základních školách (při řešení úloh o práci). Užitím přímé úměrnosti lze vyřešit první část úlohy (základní úroveň obtížnosti). Druhá část úlohy je o něco náročnější, a to zejména v souvislosti se sestavením obecného vyjádření (nejde o výpočty s konkrétními čísly). Úlohu vynechalo 13 % řešitelů (a to obě její části), přitom tato úloha nevyžaduje prakticky žádné vědomosti získané na střední škole, testuje zejména matematické uvažování. Z úspěšných řešitelů celého testu vyřešilo první část 79 % žáků a druhou část jen 38 % žáků. Z neúspěšných řešitelů celého testu vyřešilo první část 40 % žáků a druhou část již jen 10 % žáků.

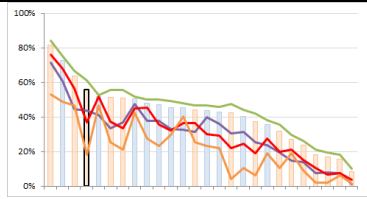
max. 2 body

4 Neznámé číslo je o 462 větší než jeho druhá odmocnina.

Vypočtete neznámé číslo. Sestavenou rovnici řešte v oboru $\mathbb{R}$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Tematický celek		Algebraické rovnice a nerovnice			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	60,91%	43,50%	36,82%	18,09%	55,86%



Úloha základní obtížnosti vyžaduje nejprve sestavení rovnice podle zadání, což je v daném případě poměrně snadné. Poté se nabízí několik možností, jak rovnici řešit (umocnění nebo substituce a řešení kvadratické rovnice). Žáci chybovali jak při sestavování rovnice, tak i v řešení rovnice. Téměř 12 % všech žáků se o řešení úlohy vůbec nepokusilo. Úloha velmi pěkně diskriminuje (68,5 %). V úloze relativně více selhávali žáci technických odborných škol (nedostatečně zvládnuté „matematické řemeslo“).

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 5

Každý z 10 soutěžících mohl získat o až 3 trestné body.

Četnosti představující počty soutěžících, kteří získali stejný počet trestných bodů, jsou v první tabulce uvedeny **v nesprávném pořadí**.

Při správném přiřazení četností je medián a modus počtu trestných bodů stejný. Ze všech takových možností je správná pouze ta, která vede k nejmenší možné hodnotě aritmetického průměru počtu trestných bodů.

Oprava

Trestné body	0	1	2	3
Četnost	0	2	3	5

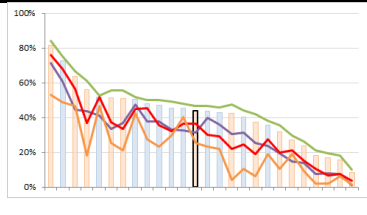
Trestné body	0	1	2	3
Četnost				

(CZVV)

1 bod

- 5 Z údajů ve správně vyplněné tabulce vypočtete aritmetický průměr počtu trestných bodů.

Tematický celek		Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	46,64%	31,50%	36,36%	25,53%	43,86%



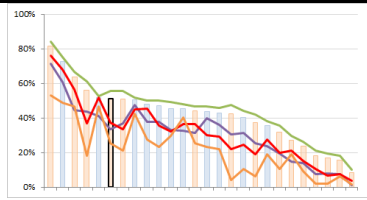
Slovní úloha předpokládá správné pochopení základních statistických veličin (medián a modus) a navíc vyžaduje jednoduchou úvahu. Výpočet aritmetického průměru je pak běžnou záležitostí. Z výsledků je patrné, že velká část řešitelů nemá do problematiky dostatečný vhled. V úloze totiž nestačí jen rutinní výpočty, ale je nutné si uvědomit, co veličiny představují a jak souvisí s četnostmi jednotlivých hodnot. Úloha opět velmi pěkně diskriminuje (53,5 %).

max. 2 body

- 6 V trojúhelníku ABC jsou dány vrcholy $A[-6; 2]$, $B[0; 0]$.
Střed S kružnice k opsané trojúhelníku ABC leží na souřadnicové ose y .

Vypočtete souřadnice středu S kružnice k .

Tematický celek		Analytická geometrie			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	55,63%	33,50%	37,12%	25,53%	51,15%



Úlohu základní úrovně obtížnosti je možné řešit několika způsoby. Jednou z možností je dosazení zadaných údajů do rovnice kružnice a vyřešení soustavy rovnic. Další možností je využít poznatků z planimetrie a sestavit rovnici osy úsečky AB a vyřešit lineární rovnici. Poznatků z planimetrie je možné použít i pro grafické řešení a správnost řešení pak ověřit početně. Úloha není obtížná a má velmi vysokou hodnotu diskriminace (72,2 %), rozlišení žáků, kteří zvládli, či nezvládli příslušné učivo, se blíží rozdílům mezi výsledky žáků v celém testu. Zhruba 16 % žáků úlohu neřešilo.

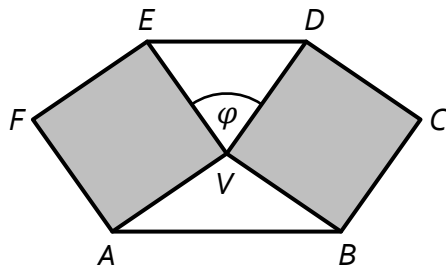
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Šestiúhelník $ABCDEF$ je rozdělen na dva bílé rovnoramenné trojúhelníky a dva shodné tmavé čtverce. Všechny čtyři útvary mají společný vrchol V .

Součet obsahů obou bílých trojúhelníků označme S_B .

Součet obsahů obou tmavých čtverců označme S_T .

Úhel DVE má velikost $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



(CZVV)

max. 2 body

7

7.1 Vyjádřete poměr obsahů $S_B : S_T$ v závislosti na velikosti úhlu φ .

7.2 Vypočtěte velikost úhlu φ , je-li poměr obsahů $S_B : S_T$ roven $1 : 4$.

Tematický celek		Funkce, planimetrie				
úspěšnost		Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	7.1	19,51%	8,00%	6,67%	2,13%	16,75%
	7.2	17,93%	7,50%	7,27%	6,38%	15,62%

Jde o nestandardní úlohu, při jejímž řešení se využívá základních středoškolských poznatků. Je třeba sestavit vztah, který mj. obsahuje vzorec pro obsah trojúhelníku využívající funkci sinus. Ke zjednodušení vztahu se využije rovnosti hodnot funkce sinus pro argumenty φ a $180^\circ - \varphi$.

V této a ještě v následující úloze jsou největší rozdíly mezi skupinou žáků, kteří z celého testu získali známku 1, a skupinou žáků se známkou 2. Polovina žáků úlohu vůbec neřešila. Řešení nestandardních úloh v běžné výuce pravděpodobně není příliš časté.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V rovině jsou dány tři různé body A , S , M .



(CZVV)

max. 3 body

- 8** Bod A je vrchol trojúhelníku ABC .
 Bod S je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC . Bod M leží na ose strany BC .
 Vnitřní úhel trojúhelníku ABC při vrcholu A má velikost $\alpha = 60^\circ$.

- 8.1** Hledáme vrcholy B , C trojúhelníku ABC .
 Proveďte náčrtek trojúhelníku ABC a запиšte rozbor nebo postup konstrukce.

V záznamovém archu obtáhněte všechny čáry a křivky **propisovací tužkou**.

Tematický celek		Planimetrie			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	9,86%	1,17%	3,64%	1,42%	8,29%

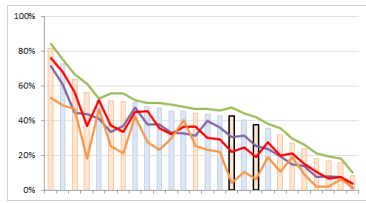
Konstrukční úlohy z planimetrie patří tradičně k méně úspěšným úlohám. Řešení úlohy nevyžaduje specifické znalosti. Je však nutné uvědomit si nezbytné souvislosti – středový úhel BSC má velikost 120° a jeho osou je přímka SM . Zcela zásadní je náčrtek a rozbor úlohy. Obtížnost úlohy se jeví jako nadstandardní zejména kvůli nedostatečné zkušenosti žáků s řešením geometrických úloh. Úlohu vyřešilo jen velmi málo žáků, kteří z celého testu získali horší známku než 1. Úloha prakticky odlišuje nejúspěšnější řešitele testu, kteří nemají zábrany potýkat se s nenacvičenou situací.

max. 2 body

- 9 Graf kvadratické funkce f se dotýká souřadnicové osy x v bodě T .
V předpisu funkce $f: y = x^2 + (p + 2)x + 0,25p^2$ je neznámé reálné číslo p .

Určete

- 9.1 neznámé číslo p ,
9.2 souřadnice bodu dotyku T .

Tematický celek			Algebraické rovnice, funkce				
úspěšnost		Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem	
	9.1	47,60%	30,50%	21,82%	4,26%	42,36%	
	9.2	41,99%	25,50%	19,09%	6,38%	37,29%	

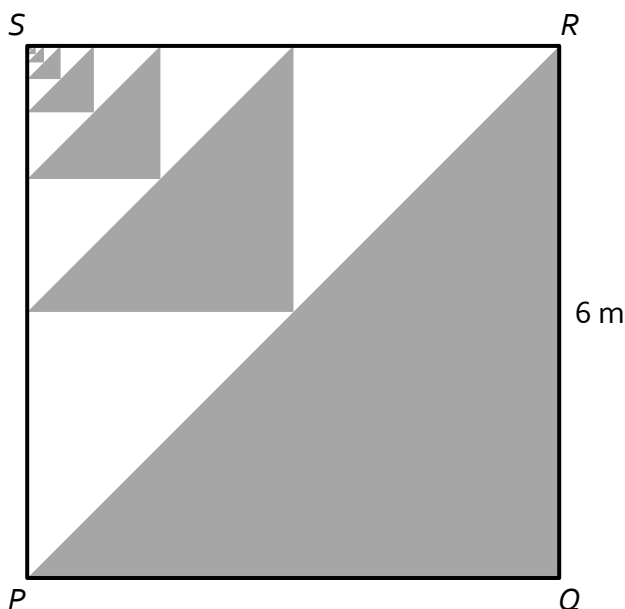
V úloze standardní obtížnosti je nejprve nutné ujasnit si situaci popsanou v zadání a poté zvolit vhodný způsob řešení. Kvadratická funkce patří k pečlivě probíraným tématům (nemáme-li na mysli humanitně zaměřené obory) a žáci mohou aplikovat jim blízké postupy (kvadratická rovnice vedoucí k právě jednomu řešení). Úloha má velmi vysokou diskriminaci, přestože úlohu dokázali vyřešit i někteří v testu neúspěšní žáci. V úloze 9 jsou největší rozdíly mezi žáky gymnázií a žáky odborných technických škol. Pro žáky technických škol je úloha pravděpodobně více „akademická“. Uvedený rozdíl v úspěšnostech mezi žáky gymnázií a technických odborných škol poukazuje na jistý rozdíl v osvojení „matematického řemesla“ žáky těchto studijních oborů. Ten se pak zpravidla promítá i do osvojení požadavků vysokoškolské matematiky.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Ve čtverci $PQRS$ o straně délky 6 m je nekonečně mnoho stále se zmenšujících tmavých rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků. Největší z nich je trojúhelník PQR .

Každý následující trojúhelník má vrchol pravého úhlu uprostřed přepony předchozího trojúhelníku, což je i jediný společný bod obou trojúhelníků.

Středem stejnolehlosti libovolné dvojice těchto trojúhelníků je vrchol S .



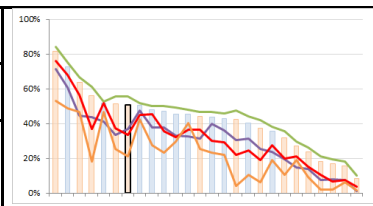
(CZVV)

max. 2 body

- 10 Vyjádřete poměr obsahu všech bílých ploch ku obsahu všech tmavých ploch ve čtverci $PQRS$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Tematický celek		Posloupnosti, planimetrie			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	55,54%	36,75%	33,48%	21,28%	50,79%



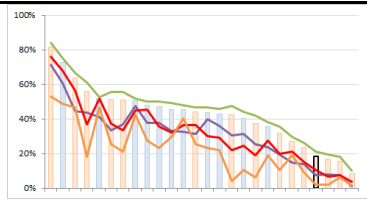
Úloha je na pomezí základní a standardní úrovně obtížnosti. V závislosti na zvolené strategii může být řešení buď velmi rychlé a jednoduché, nebo tradiční, ale o trochu pracnější. Pokud žáci ve škole probírají standardní aplikační úlohy na geometrické řady, neměli by mít s řešením úlohy problém. Může se však stát, že se toto učivo probírá pouze v seminářích. Pak záleží na tom, zdali jde o důkladné procvičení učiva, nebo pouze o informativní seznámení s tímto tématem. Úloha je jednou ze čtyř úloh s nejvyšší diskriminací (72,3 %). Vynechalo ji však téměř 23 % žáků. To vypovídá o příčině neúspěchu nemalé skupiny žáků v celém testu. Tito žáci pravděpodobně podcenili dané požadavky k výběrové zkoušce MATEMATIKA+ a v některých tematických celcích mají značné mezery (neprobrané učivo). Přitom na vysoké škole se žáci určitě setkají s navazujícím učivem.

max. 4 body

- 11** V rostoucí aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí, že první, druhý a pátý člen (a_1, a_2, a_5) v tomto pořadí tvoří první tři členy geometrické posloupnosti.
- 11.1 Vyjádřete diferenci d aritmetické posloupnosti v závislosti na prvním členu a_1 .
- 11.2 Určete kvocient q geometrické posloupnosti.
- 11.3 Určete, kolikátým členem aritmetické posloupnosti je 5. člen geometrické posloupnosti.
- 11.4 Vyjádřete v závislosti na k , kolikátým členem aritmetické posloupnosti je k -tý člen geometrické posloupnosti.

V záznamovém archu uveďte ve všech částech úlohy celý postup řešení.

Tematický celek		Posloupnosti			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	20,91%	7,63%	10,53%	2,13%	18,30%



Nestandardní úlohu, která měla odlišit výtečné žáky od průměrných, vynechalo zhruba 36 % žáků. Úspěšní řešitelé předvedli několik způsobů řešení. Samotné řešení není nikterak neschůdné a nepředpokládá hlubší vědomosti (postačí požadavky ke zkoušce z matematiky ve společné části maturit), předpokládá však porozumění zadání (proto asi vysoká „vynechanost“), samostatnou úvahu a dovednost pracovat s obecným vyjádřením. V této úloze (obdobně jako v úlohách 7, 8 a 12) jsou velké rozdíly mezi žáky, kteří získali z testu jako celku známky 1, 2 nebo 3.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 12

Z dlouhodobých statistik vyplývá, že 5 % osob má vlastnost A a 10 % osob vlastnost B. Obě vlastnosti se nepodmiňují, naopak jsou nezávislé.

(CZVV)

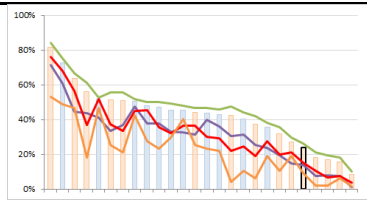
max. 3 body

12 Vypočtete s přesností na tisíce pravděpodobnosti jevů:

12.1 Náhodně vybraná osoba nemá ani jednu z obou vlastností A, B.

12.2 Alespoň jedna z 5 náhodně vybraných osob má alespoň jednu z obou vlastností A, B.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý postup řešení.

Tematický celek		Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika				
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem	
	26,37%	14,00%	14,95%	9,22%	23,72%	

Úloha, která může najít uplatnění i v praxi, patřila ke čtyřem nejobtížnějším úlohám v testu. První část úlohy, která je hodnocena jedním z celkových tří bodů, je relativně snadná, neboť jde o průnik nezávislých jevů. Alespoň tuto část vyřešilo téměř 42 % řešitelů (resp. 57,5 % řešitelů úspěšných v celém testu). Druhá část úlohy vyžaduje zejména správnou logickou úvahu a hlubší znalost z pravděpodobnosti, než je vyžadována ke zkoušce z matematiky ve společné části maturit. Celou úlohu vyřešilo bezchybně necelých 14 % řešitelů (resp. 22,5 % řešitelů úspěšných v celém testu).

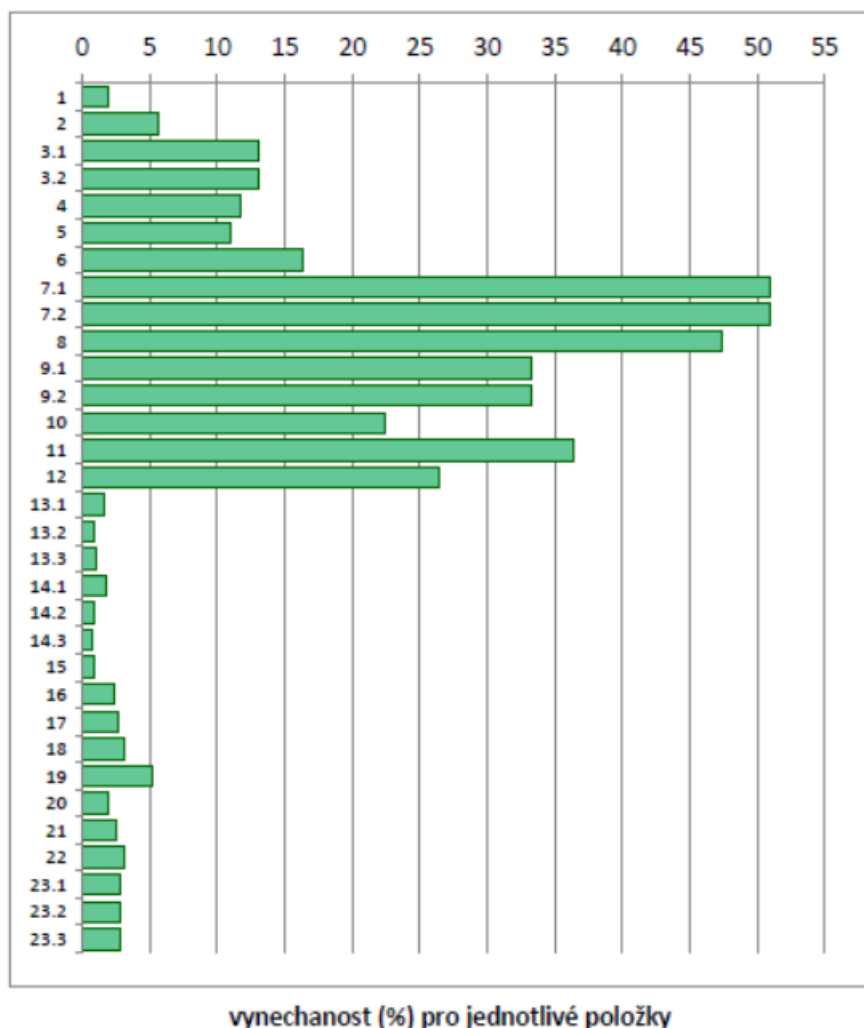
Žáci, kteří vyřešili všechny čtyři zmíněné obtížnější úlohy (7, 8, 11 a 12), prokázali jistou všestrannost, dobré logické myšlení a osvojení znalostí na vysoké úrovni. Lze konstatovat, že mají výtečné studijní předpoklady a na vysoké škole mohou mít vyšší ambice než ostatní řešitelé.

Než přistoupíme k hodnocení uzavřených úloh, připomeneme některé souvislosti, resp. rozdíly v otevřené a uzavřené části testu.

Za řešení všech otevřených úloh (1–12) bylo možné získat celkem 25 bodů, tedy polovinu z maximálního počtu bodů za test. Část žáků některé otevřené úlohy vůbec neřešila. Nebylo ojedinělé, že žák otevřené úlohy vůbec neřešil nebo neuvedl odpověď u většiny z nich. Tzv. „vynechanost“ (tj. procento žáků, kteří danou úlohu neřeší) v otevřených úlohách byla nejčastěji v rozmezí 10 %–50 %.

Druhou polovinu bodů bylo možné získat za řešení uzavřených úloh (13–23). Tyto úlohy obsahují kromě zadání ještě nabídku možných odpovědí a žák z ní správnou odpověď (správné řešení) vybírá. Žák zpravidla vybírá některou z odpovědí i v případě, že se k žádné z nabízených alternativ nedopočítal. Nedokáže-li úlohu vyřešit, může alespoň kalkulovat s možností náhodného výběru správné odpovědi. Právě toto je jednou z příčin velmi nízké „vynechanosti“ v uzavřených úlohách. (Cut-off score je stanoveno na 33 % maximálního počtu bodů za test. Někteří žáci mají pocit, že stačí řešit pouze uzavřené úlohy, za něž lze získat až 50 % maximálního počtu bodů.)

Rozdíly ve „vynechanosti“ v otevřených a uzavřených úlohách dokládá následující graf.



V uzavřených úlohách díky náhodnému výběru odpovědí některými žáky průměrná úspěšnost v úloze mírně narůstá. Čím méně žáků úlohu skutečně vyřeší, tím větší podíl mají na průměrné úspěšnosti náhodné odpovědi. Pokud bychom chtěli porovnávat obtížnost ověřovaných požadavků v otevřených a uzavřených úlohách, měli bychom proto provést jisté upřesnění. Přesnější odhad skutečné úspěšnosti v uzavřené úloze získáme odečtením pravděpodobného počtu bodů za náhodně vybrané správné odpovědi u skupiny žáků, kteří úlohu ve skutečnosti neřešili. Vycházíme zde z předpokladu, že všechny nabízené odpovědi jsou pro tyto žáky zhruba stejně lákavé:

$$\text{dolní odhad úspěšnosti v úloze} = \frac{u - p}{1 - p} ; u, p \in \langle 0, 1 \rangle$$

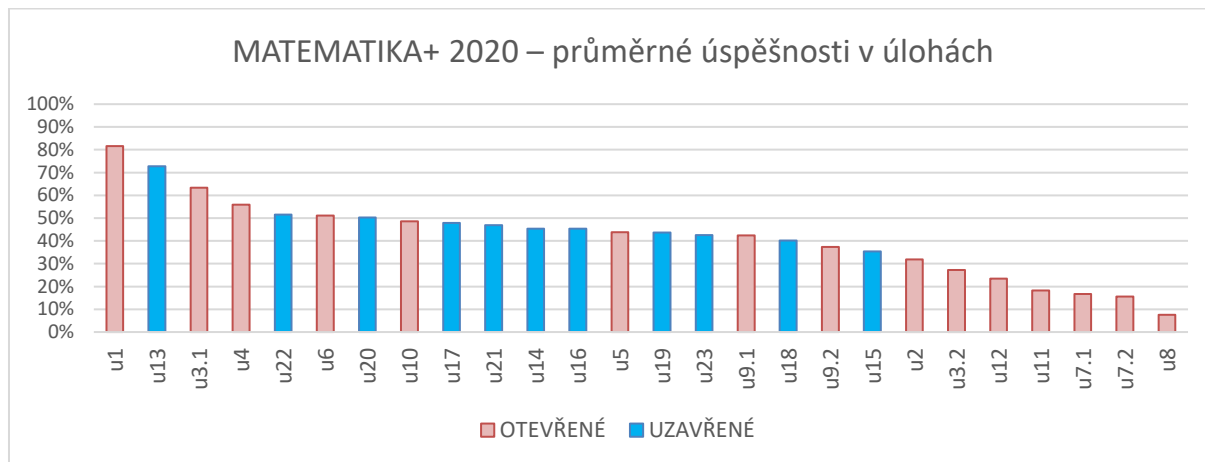
(u – naměřená úspěšnost v úloze, p – pravděpodobnost náhodného výběru správné odpovědi)

V otevřených úlohách je hodnota pravděpodobnosti p nulová, tedy odhad úspěšnosti je shodný s naměřenou hodnotou. Pokud uzavřenou úlohu vyřeší všichni žáci bezchybně ($u = 1$), pak ani zde nezůstává prostor pro náhodný výběr odpovědí, tedy i v tomto případě je dolní odhad úspěšnosti shodný s naměřenou hodnotou. Žáci, kteří úlohu vynechávají, se na náhodném výběru odpovědí nepodílí. Přesnější odhad úspěšnosti v uzavřené úloze tak získáme zapracováním tzv. vynechanosti (n).

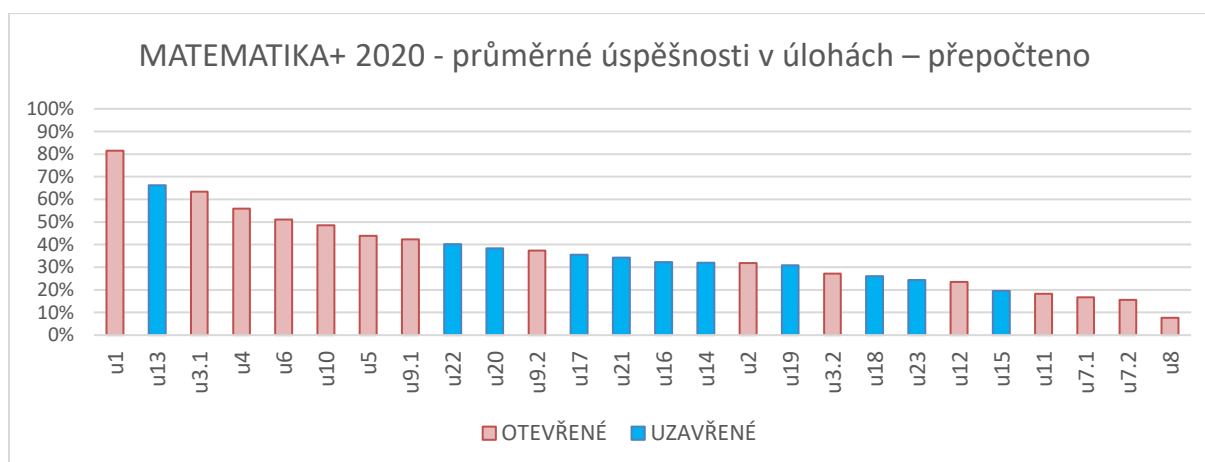
$$\text{dolní odhad úspěšnosti v úloze} = \frac{u - p(1 - n)}{1 - p} ; u, p, n \in \langle 0, 1 \rangle$$

S náhodným výběrem některých odpovědí v uzavřených úlohách souvisí i diskriminace. O něco vyšších hodnot bývá dosaženo zpravidla v otevřených úlohách, které nejsou zatíženy touto chybou.

Naměřené hodnoty úspěšnosti (tedy bez použití přepočtu v uzavřených úlohách) seřazené sestupně zobrazuje následující graf.

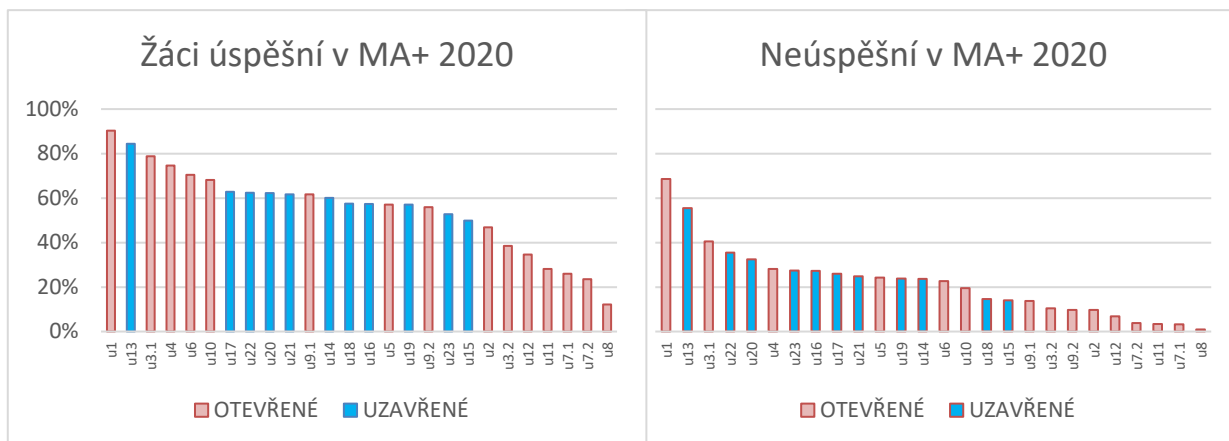


Naměřené průměrné úspěšnosti nedovolují objektivně porovnávat skutečnou obtížnost otevřených a uzavřených úloh. Proto se výše naznačeným způsobem pokusíme eliminovat chybu způsobenou náhodným výběrem odpovědí v uzavřených úlohách.



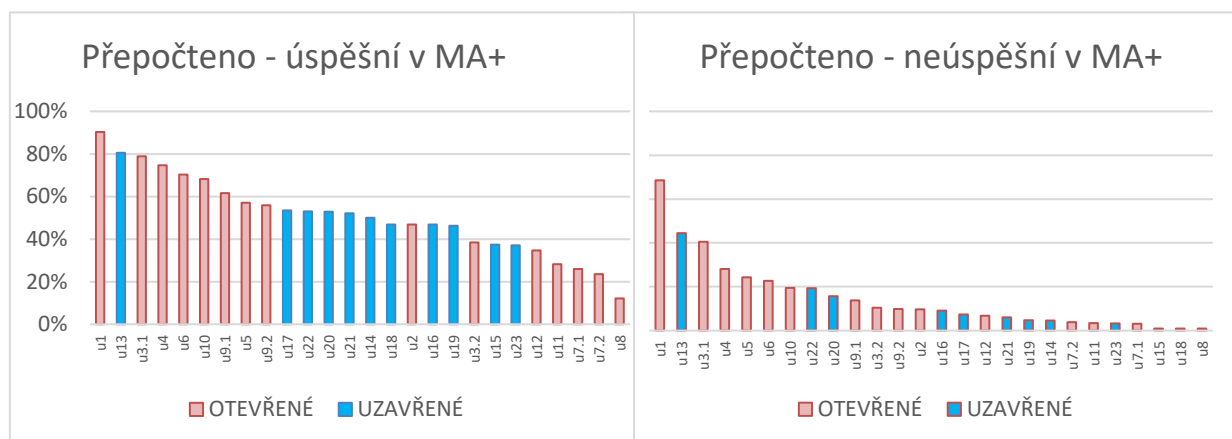
Vidíme, že přepočtem se změnilo pořadí otevřených a uzavřených úloh seřazených podle průměrné úspěšnosti od nejvyšší po nejnižší. Existuje totiž relativně početná skupina otevřených úloh, jejichž řešení je pro žáky dostupnější než řešení uzavřených úloh. Přesto i tyto otevřené úlohy asi 10 %–15 %, zejména slabých žáků, vynechává. Naopak uzavřené úlohy žáci téměř nevynechávají, a to ani v případě, že je řešit neumí.

Zkoušky MATEMATIKA+ se kromě připravených žáků účastní i relativně velká skupina žáků, která ke zkoušce není dostatečně připravena. Zajímavý obrázek získáme, pokud všechny účastníky rozdělíme na dvě disjunktní skupiny – úspěšné řešitele v testu jako celku a neúspěšné řešitele.



Skupina úspěšných žáků v testu dosahuje v jednotlivých úlohách průměrné úspěšnosti v rozmezí od 10 % až do 90 %. U většiny úloh je pak průměrná úspěšnost vyšší než 50 %. Ve skupině neúspěšných žáků je ve většině úloh průměrná úspěšnost nižší než 30 %. Žáci této skupiny jednoznačně preferují uzavřené úlohy. Průměrnou úspěšnost otevřených úloh snižuje mj. to, že je žáci neřeší.

Zajímavý obrázek získáme při porovnání průměrných úspěšností úloh po eliminaci chyby způsobené náhodným výběrem odpovědí.



Je patrné, že pro nejslabší skupinu žáků jsou i uzavřené úlohy obtížné a že bez možnosti náhodného výběru odpovědi by za ně prakticky žádné body nezískali (výjimkou je úloha 13.) Ani získané body jim však k úspěšnému složení zkoušky nestačí.

Při posuzování průměrných úspěšností v uzavřených úlohách prosté srovnání s otevřenými úlohami tedy není bez určité revize možné.

max. 3 body

13 Přiřadte ke každé nerovnici (13.1–13.3) množinu všech jejích řešení (A–F) v oboru $\mathbb{R}$.

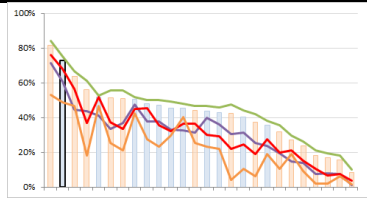
13.1 $\frac{|3-x|}{|x-3|} > \frac{x}{3}$ _____

13.2 $\frac{\sqrt{x+3}}{9-x^2} > 0$ _____

13.3 $\frac{9-x^2}{9+x^2} > 1$ _____

- A) $\emptyset$
- B) $(-\infty; 3)$
- C) $(-3; 3)$
- D) $(-3; +\infty)$
- E) $(3; +\infty)$
- F) jiná množina

Tematický celek		Algebraické rovnice, nerovnice			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	75,20%	60,83%	67,88%	48,94%	72,75%



Úloha základní úrovně obtížnosti patří k nejjednodušším úlohám v testu a z uzavřených úloh je vůbec nejsnazší. Úlohu dokázala úspěšně vyřešit dokonce i většina žáků, kteří v testu jako celku neuspěli. Žáci měli největší problém s řešením úlohy s absolutní hodnotou (učivo 1. ročníku). Přitom si stačilo uvědomit, že oba zápisy s absolutní hodnotou představují totožné výrazy, a poté již bylo řešení úlohy triviální. Nedostatky tohoto typu svědčí o tom, že část žáků nemá dostatečně zažitě základy. Je otázkou, zdali tito žáci věnovali dostatek času opakování a zkoušku nepodcenili (zejména žáci z oborů s nízkou hodinovou dotací matematiky). Celkem 8 % žáků nevyřešilo ani jednu ze tří nerovnic. Naopak všechny tři nerovnice vyřešilo správně 50 % žáků.

max. 3 body

- 14 Každá funkce daná některým z následujících předpisů je definována pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathbb{R}$.

Přiřadte ke každému předpisu funkce (0.1–0.3) útvar (A–F), na němž leží všechny body grafu této funkce.

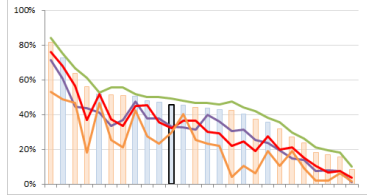
14.1 $y = \frac{2x}{\sqrt{x}}$ _____

14.2 $y = \frac{|x|}{2x}$ _____

14.3 $y = \frac{\sqrt{x^2}}{2}$ _____

- A) jedna přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou x
- B) jedna přímka různoběžná se souřadnicovou osou x
- C) dvojice rovnoběžných polopřímek neležících na téže přímce
- D) dvojice různoběžných polopřímek
- E) hyperbola
- F) parabola

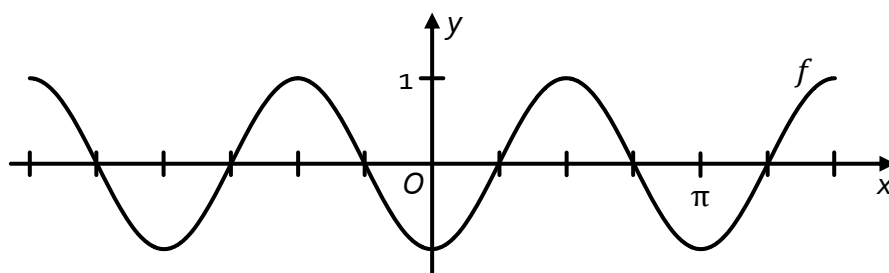
Tematický celek		Funkce, algebraické výrazy			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	49,06%	33,00%	32,02%	29,79%	45,40%



Časově nenáročná a netradičně zadaná úloha prověřuje, zdali řešitel při úpravě výrazu dokáže pracovat s absolutní hodnotou, s definičním oborem výrazu a má-li představu o grafech jednoduchých algebraických funkcí. Žáci nejméně chybovali u druhé podúlohy, nejvíce pak chybovali u třetí podúlohy, když si neporadili s výrazem v čitateli lomeného výrazu. Ve všech částech úlohy bylo možné v krajním případě (při naprosté neznalosti) dosadit do předpisu funkce několik bodů a celkem spolehlivě určit typ grafu funkce. Výsledky napovídají, že tuto možnost někteří řešitelé využili, ale část z méně úspěšných řešitelů spíše tipovala (vynechanost je pouze kolem 1 %). Úloha má relativně vysokou korelaci se zbytkem testu, což bývá průvodním znakem svazků úloh ověřujících obdobnou dovednost.

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 15

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf goniometrické funkce f definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$.



(CZVV)

2 body

15 Která z rovností není předpisem funkce f ?

- A) $y = -\cos 2x$
- B) $y = -\cos(-2x)$
- C) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
- D) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$
- E) Všechny uvedené rovnosti (A–D) jsou předpisy téže funkce f .

Tematický celek		Funkce			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	38,26%	23,50%	27,27%	19,15%	35,45%

Zadání úlohy standardní úrovně obtížnosti by řešitele nemělo překvapit. Užitím vzorců, které mohou žáci případně vyčíst i v matematických tabulkách, lze předpisy funkcí v jednotlivých alternativách snadno upravit na identický vztah. Shodnost alternativ A, B a D je vidět téměř na první pohled, ovládali řešitel základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi. Pokud však žáci postupně (otrocky) počítají na kalkulačce hodnoty funkcí v alternativách A–D dosazováním několika hodnot, mohou snadno chybovat a dojít tak k nesprávnému řešení. S výjimkou alternativy A žáci při výpočtech skutečně často chybovali. Relativně nízká úspěšnost v úloze je důsledkem neznalosti základních vztahů, což žáky nutí k neefektivní metodě řešení. Bohužel v této úloze selhávají i žáci gymnázií. Svědčí to o povrchnosti vědomostí v této oblasti.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Pětimístný kód má být sestaven z 5 **různých** číslic.

Z číslic 0–9 kód musí obsahovat číslice 0, 1, 2 a s nimi ještě další dvě číslice. Číslice 0 bude uprostřed kódu.

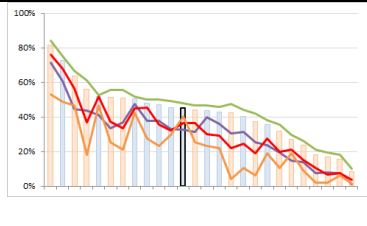
(CZVV)

2 body

16 Jaký je počet všech možností pro sestavení kódu?

- A) 144
- B) 252
- C) 432
- D) 504
- E) jiný počet

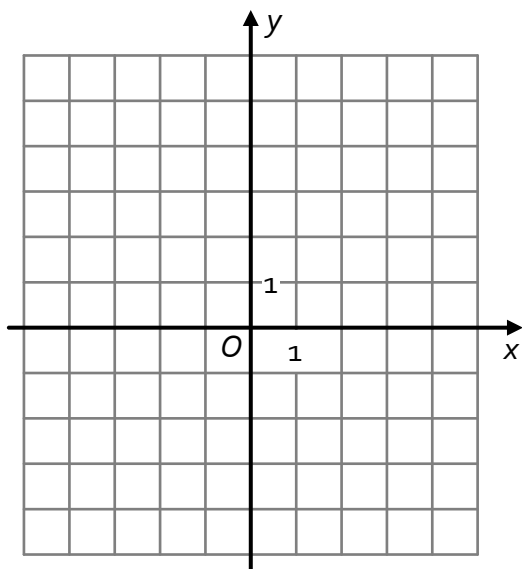
Tematický celek		Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	48,03%	32,50%	36,36%	40,43%	45,29%



Úloha standardní úrovně obtížnosti má početně snadné řešení, které však vyžaduje správnou úvahu a zřejmě i jistou zkušenost s řešením obdobných úloh. Nestačí totiž jen prostá znalost počtu kombinatorických skupin. Správný postup obsahuje několik kroků (vybírání se dvojice ze čtyř míst, na něž se umístí číslice 1 a 2 v libovolném pořadí, a na dvě zbývající místa se umístí dvě různé číslice ze sedmi). Některé chyby v úvaze vedou k výběru nabízených distraktorů. Někteří z úspěšných žáků v testu v důsledku těchto chyb preferovali distraktory B, případně E, kdežto odpovědi neúspěšných žáků v testu byly celkem rovnoměrně rozděleny mezi všechny alternativy, což bývá průvodním znakem náhodného výběru odpovědi.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

V trojúhelníku NOP platí: $\overrightarrow{NO} = (2; -5)$, $\overrightarrow{OP} = (1; 5)$.



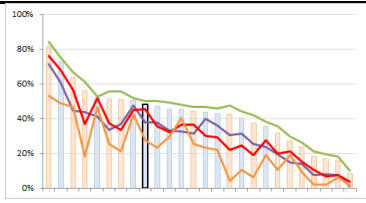
(CZVV)

2 body

- 17 Jaká je velikost konvexního úhlu ONP ?
Výsledek je zaokrouhlen na desetiny stupně.

- A) $67,9^\circ$
- B) $68,0^\circ$
- C) $68,1^\circ$
- D) $68,2^\circ$
- E) jiná velikost

Tematický celek		Analytická geometrie			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	49,81%	37,50%	45,15%	27,66%	47,92%



Úloha základní úrovně obtížnosti vyžaduje grafické řešení. Tedy vektory ze zadání se umístí do zakreslené soustavy souřadnic. Poté lze užít vzorec pro úhel dvou vektorů, jednodušeji jen goniometrickou funkci v pravoúhlém trojúhelníku. Pokud žáci nemají počítání s vektory propojeno s grafickou představou, s řešením úlohy si těžko poradí. Analytická geometrie by neměla být chápána pouze jako soustava vzorců. Každý test MATEMATIKY+ obsahuje úlohy z analytické geometrie, jejichž řešení využívá geometrické interpretace.

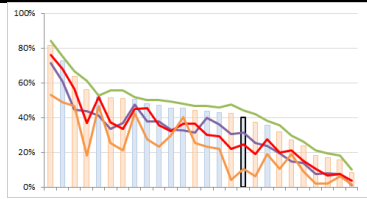
2 body

- 18** Na parabole s ohniskem $F[0; 9]$ a řídící přímkou $d: y = -9$ leží dva různé body A, B , jejichž druhá souřadnice je $y = 4$.

Jaká je vzdálenost bodů A, B ?

- A) menší než 18
- B) 18
- C) 20
- D) 22
- E) 24

Tematický celek		Analytická geometrie			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	44,15%	31,50%	24,55%	10,64%	40,18%



Při řešení úlohy standardní úrovně obtížnosti je potřeba chápat souvislost mezi definicí paraboly a její rovnicí. (Opět je možné použít matematické tabulky.) Rovnice paraboly se více odlišuje od rovnic ostatních kuželoseček a žáci s ní mívají častěji problémy. I když učivo o kuželosečkách bývá tradičně začleňováno do ŠVP technických odborných škol, věnuje se mu zřejmě méně pozornosti, neboť není součástí požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky. Přepočtená průměrná úspěšnost naznačuje, že většina žáků ST1 toto učivo nezvládla.

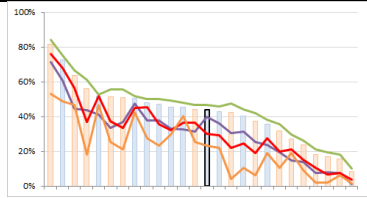
2 body

- 19 Bod $A[0; 1; 2]$ je vrchol krychle $ABCDEFGH$.
Stěna $EFGH$ této krychle leží v rovině $\rho: 2x - 3y + z + 15 = 0$.

Jaký je povrch této krychle?

- A) menší než 8_4
B) 8_4
C) 12_6
D) 19_2
E) větší než 19_2

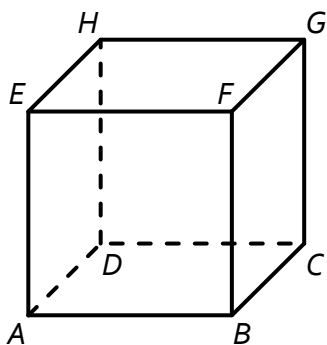
Tematický celek		Analytická geometrie			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	46,60%	40,00%	30,00%	23,40%	43,63%



V řešení úlohy je stěžejní výpočet vzdálenosti daného bodu od dané roviny. V podstatě jde o pouhé dosazení zadaných údajů do vzorce, který je možné vyhledat v matematických tabulkách. Následný výpočet povrchu krychle je rutinní záležitost i pro žáka 9. ročníku ZŠ. Jde o základní úvahu a ani výpočet není pracný. Úloha by měla být zařazena mezi úlohy základní úrovně obtížnosti, ale výsledky tomu neodpovídají. Je patrné, že analytické geometrii v prostoru je v matematice na střední škole věnován minimální čas (pokud vůbec). V matematice na vysoké škole se velmi brzy probírají vícerozměrné prostory a bez zkušenosti s úlohami z analytické geometrie v trojrozměrném prostoru se žáci v této problematice budou velmi obtížně orientovat.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

V krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky 6 cm je umístěn **trojboký** jehlan $ACEH$.



(CZVV)

2 body

20 Jaký je objem trojbokého jehlanu $ACEH$?

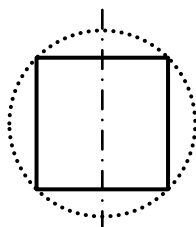
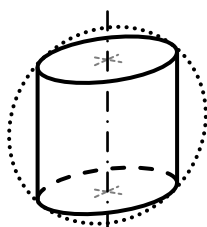
- A) 36 cm^3
- B) 48 cm^3
- C) 54 cm^3
- D) 72 cm^3
- E) jiný objem

Tematický celek		Stereometrie			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	51,58%	47,50%	44,85%	42,55%	50,28%

Jde o velmi jednoduchou úlohu základní úrovně obtížnosti. Jediným úskalím je výběr vhodné stěny (AEH) jako podstavy jehlanu a správné stanovení výšky (shodné s délkou hrany krychle). Pak je již zřejmé, že objem jehlanu bude šestinou objemu krychle, a výsledek je možné vypočítat z paměti. Žáci si mohli úlohu usnadnit narýsováním jehlanu do obrázku krychle. Pak lze snáze nahlédnout tři vrcholy jehlanu v jedné stěně krychle. V této úloze jsou menší rozdíly v úspěšnostech mezi gymnazisty a ostatními obory. Jistou roli zde pravděpodobně hraje i prostorová představivost žáků.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Kulová plocha o poloměru r je opsána rovnostrannému válci.
(Výška rovnostranného válce se shoduje s průměrem podstavy.)



Osový řez válce

(CZVV)

2 body

21 Jaký je objem válce?

A) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi r^3$

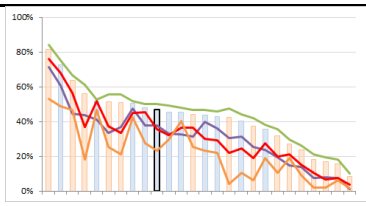
B) $\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \pi r^3$

C) $\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \pi r^3$

D) $\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \pi r^3$

E) jiný objem

Tematický celek		Stereometrie			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	50,10%	37,50%	35,45%	23,40%	46,86%



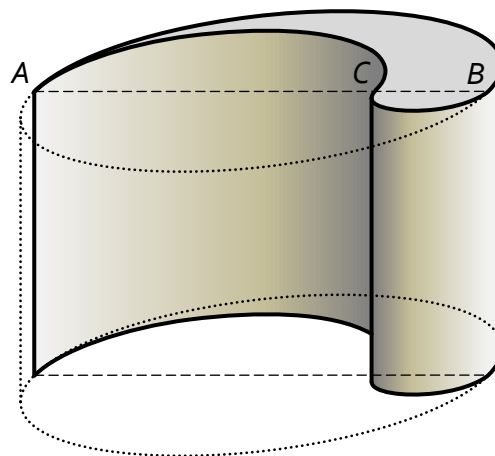
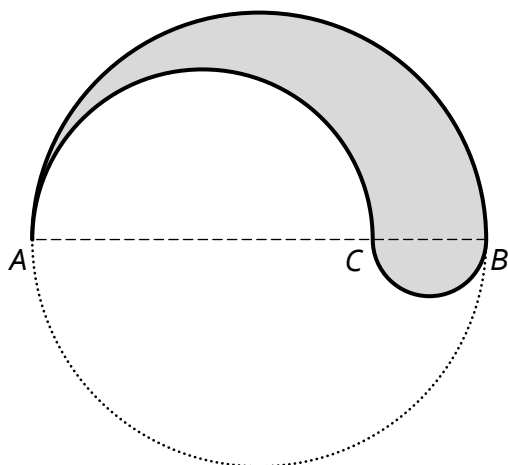
Úloha ze stereometrie je relativně jednoduchá. V podstatě jediným problémem je určit poloměr podstavy válce v závislosti na poloměru koule. Zakreslením obou poloměrů do obrázku představujícího osový řez válce lze zjistit, že jde o odvěsnu a přeponu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku. Vztah těchto veličin udává Pythagorova věta (učivo 9. ročníku ZŠ). Poté stačí dosadit do vzorce pro objem válce. V úloze je patrný rozdíl ve výsledcích gymnazistů a žáků z ostatních oborů, kterým pravděpodobně nejvíce vadí obecné zadání.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Z rotačního válce s výškou 10 cm a průměrem podstavy 16 cm bylo vysoustruženo nové kolmé těleso stejné výšky.

Podstava nového tělesa je ohraničena třemi půlkružnicemi s krajními body A, B, C , kde bod C dělí průměr AB podstavy původního válce na dvě úsečky, z nichž CB má délku 4 cm.

Podstava nového tělesa



Nové těleso je (obdobně jako rotační válec) ohraničeno dvěma podstavami a pláštěm.

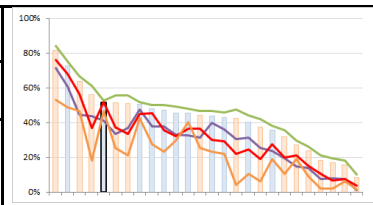
(CZVV)

2 body

22 O kolik cm^2 se liší obsah pláště nového tělesa a obsah pláště původního válce?

- A) Nové těleso má obsah pláště o $32\pi \text{ cm}^2$ menší než původní válec.
- B) Nové těleso má obsah pláště o $16\pi \text{ cm}^2$ menší než původní válec.
- C) Oba obsahy jsou stejné.
- D) Nové těleso má obsah pláště o $32\pi \text{ cm}^2$ větší než původní válec.
- E) Obsahy se liší jinak, než je výše uvedeno.

Tematický celek		Stereometrie, planimetrie			
	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
úspěšnost	52,64%	41,00%	51,52%	46,81%	51,52%



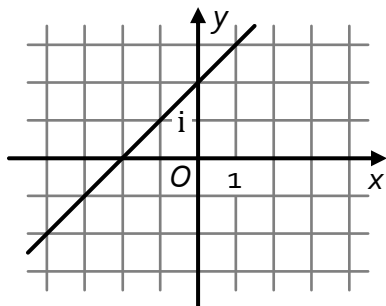
Úloha na první pohled není tak jednoduchá jako předchozí dvě úlohy, přitom úspěšnost v této úloze je vyšší. Určitou roli zde může hrát správný odhad, kdy řešitel z prvního obrázku usoudí (resp. odhadne měřením), že obvod kruhu (tj. obvod podstavy válce) a obvod podstavy nového tělesa je stejný. Protože výšky obou těles jsou shodné, lze odpovědět bez dalšího výpočtu. Ve skupině neúspěšných žáků v testu jde o druhou nejúspěšnější uzavřenou úlohu (minimálně 20 % žáků této skupiny úlohu skutečně vyřešilo výpočtem nebo úvahou a nikoli jen náhodným výběrem odpovědi). K řešení úlohy navíc postačí vědomosti nabyté na základní škole.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 23

V Gaussově rovině jsou zobrazeny tři množiny komplexních čísel z .

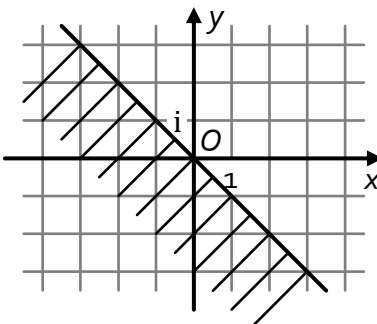
23.1

Přímka



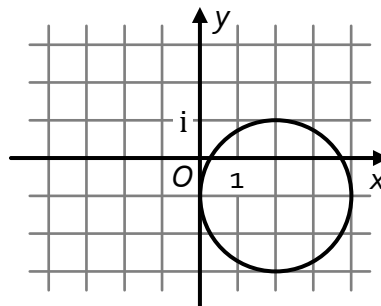
23.2

Polorovina



23.3

Kružnice



(CZVV)

max. 3 body

23 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (23.1–23.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

23.1 Zobrazená přímka je určena rovnicí $|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$.

A	N
☐	☐

23.2 Zobrazená polorovina je určena nerovnicí $|z + 1| \leq |z - i|$.

☐	☐
--------------------------	--------------------------

23.3 Zobrazená kružnice je určena rovnicí $|2i| = |z - 2 + i|$.

☐	☐
--------------------------	--------------------------

Tematický celek		Číselné obory			
úspěšnost	Gymnázia	Lycea	ST1	Ostatní	Celkem
	45,81%	36,00%	29,09%	21,99%	42,58%

A line graph showing success rates (y-axis, 0% to 100%) over time (x-axis, 0 to 10). There are four data series: a green line (highest), a red line, a blue line, and an orange line (lowest). All series show a general downward trend with some fluctuations. The green line starts at approximately 80% and ends near 20%. The red line starts at approximately 60% and ends near 10%. The blue line starts at approximately 40% and ends near 10%. The orange line starts at approximately 20% and ends near 10%.

Úloha je postavena na středoškolském učivu, které se dnes většinou probírá až v matematických seminářích. Jde o geometrickou interpretaci komplexních čísel a absolutní hodnotu rozdílu komplexních čísel v Gaussově rovině. Pro žáka, který danou problematikou ve výuce prošel, jde o standardní úlohu. Pokud si žák učivo dostudoval samostatně, může být zaskočen. Velká část žáků nemá požadované znalosti, aby úlohu úspěšně vyřešila. Není ojedinělé, že učitelé matematiky na vysoké škole technického zaměření netuší, že řada středoškoláků se o komplexních číslech nemusela na střední škole nic dozvědět. Vysokoškolská výuka matematiky na technických oborech totiž běžně navazuje na předpokládané základní středoškolské znalosti o komplexních číslech.

5 ZHODNOCENÍ PILOTNÍHO PROJEKTU

5.1. SHRNUTÍ

V sedmém ročníku pokusného ověřování se ke zkoušce MATEMATIKA+ přihlásilo 3 419 žáků. Zkoušku nakonec konalo 2 663 žáků, z nichž 1 594 uspělo a 1 069 neuspělo.

Čistá neúspěšnost dosáhla hodnoty 40,1 %, hrubá neúspěšnost⁷ byla 53,4 %. Nejnižší čistou neúspěšnost vykázali žáci osmiletých gymnázií (24,5 %). Čistá neúspěšnost a úspěšnost žáků z jednotlivých skupin oborů vzdělání je patrna z následující tabulky.

V roce 2020 v testu zkoušky MATEMATIKA+ žáci v průměru získali 21,3 bodu z 50 možných, což je 42,6 %. Ve srovnání s rokem 2019 (26,2 bodu) to bylo o 4,9 bodu méně. Čistá neúspěšnost se v roce 2020 oproti roku 2019 (19,7 %) zvýšila o 20,4 procentního bodu. Ve srovnání s rokem 2019 ke zkoušce přišla menší část přihlášených (v roce 2019 se jednalo o 2 715 z 3 193, v roce 2020 šlo o 2 663 z 3 419). To mohlo být způsobeno posunutím termínu konání zkoušky nebo také nedostatečnou přípravou v době distančního vzdělávání.

Školní výuka a příprava na zkoušku byla totiž na jaře roku 2020 narušena pandemií nemoci Covid-19. Zavedená distanční výuka kladla mnohem vyšší nároky na samostatné studium žáků. Zejména v oborech s nižší hodinovou dotací, kde se část požadavků ke zkoušce vyučuje pouze v seminářích, žáci neabsolvovali přípravu v plném rozsahu. Proto se výrazně zvýšil počet žáků, kteří ve zkoušce neuspěli. Pravděpodobně si slabší žáci nechali ujít příležitost pokusit se získat benefit pro přijímací řízení na vysokých školách, které zkoušku MATEMATIKA+ akceptují jako jedno z kritérií přijímacího řízení. Dalším faktorem může být i to, že výborní žáci už na vysokou školu byli přijati ještě před zahájením zkoušky.

V roce 2020 stejně jako v letech 2017 až 2019 se žáci přihlašovali sami prostřednictvím aplikace, zkouška se konala na spádových školách a výsledek zkoušky nebyl uveden na maturitním vysvědčení. Ke zkoušce přišlo 78 % přihlášených. Znovu se ukázalo, že v rámci maturitní populace existují žáci, kteří mají potenciál a vůli zkoušku obdobné náročnosti zvládnout. Samozřejmě významnou roli v rozhodování hrají, jak bylo již uvedeno, vnější motivační faktory, zejména přístup vysokých škol k akceptaci zkoušky MATEMATIKA+ v rámci přijímacích řízení. Seznam fakult a vysokých škol je uveden [zde](#). Stále se zvyšující počet fakult a vysokých škol deklarujících zařazení výsledků zkoušky do přijímacích kritérií či podmínek pro motivační stipendia vytváří a může i nadále vytvářet potenciál pro růst zájemců o absolvování zkoušky.

Pro úspěšnou realizaci MA+ v dalších letech je důležité, že vysoké školy, které výsledků zkoušky MATEMATIKA+ využily, to považují za přínosné. To, že MŠMT zařadilo od školního roku 2020/2021 zkoušku Matematika rozšiřující do portfolia nepovinných zkoušek společné části maturitní zkoušky, může eliminovat i dosud panující obavu vysokých škol o další budoucnost zkoušky.

5.2. NAPLNĚNÍ CÍLŮ

Na základě zhodnocení sedmého ročníku pokusného ověřování lze znovu konstatovat, že se základní záměry daří naplňovat.

Centrum stejně jako v předchozích letech připravilo výběrovou zkoušku ze středoškolského učiva matematiky. Tato zkouška je schopna ověřit dovednosti a vědomosti žáků na úrovni očekávaných výstupů a učiva podle vyhlášením deklarovaných rámcových vzdělávacích programů oborů středního vzdělání, jež mají vyšší než desetihodinovou týdenní dotaci výuky matematiky po dobu vzdělávání, a na

⁷ Hrubá neúspěšnost = (počet nekonajících + počet neúspěšných)/počet přihlášených.

úrovni požadavků, které na vstupu očekávají vysoké školy přírodovědného, technického a ekonomického zaměření.

Diskuse k míře naplnění základních cílů je provedena jednotlivě u každého stanoveného cíle v následujícím textu:

1. podpořit matematické, technické a přírodovědné vzdělávání v souladu s dokumenty Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2020 a Dlouhodobý záměr vzdělávání a rozvoje vzdělávací soustavy České republiky na léta 2011;

Vyhodnocení:

Přestože ve školním roce 2019/2020 zkouška MATEMATIKA+ nebyla zařazena do portfolia nepovinných zkoušek maturitní zkoušky (jednalo se o výběrovou zkoušku), zvýšil se počet těch, kteří se ke zkoušce přihlásili. Zájem maturantů byl podporován příklonem stále většího počtu vysokých škol k využití výsledků této výběrové zkoušky jako kritérií pro přijímání ke studiu či přiznání motivačních stipendií. Veřejné vysoké školy s technickým, přírodovědným a matematickým zaměřením již dlouhodobě postrádají záruku, že středoškolák se při výuce matematiky na střední škole může dopracovat na požadovanou úroveň uchazeče o studium na vysoké škole. Zájem o zkoušku pravděpodobně zvýší i novela školského zákona, kterou byla zkouška [matematika rozšiřující](#) zařazena do portfolia nepovinných zkoušek společné části maturitní zkoušky.

2. motivovat žáky a jejich učitele ke zvýšenému úsilí dosahovat takových vědomostí a dovedností v oblasti matematického vzdělávání, jež odpovídají očekávaným výstupům podle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia (RVP G) a podle rámcových vzdělávacích programů dalších oborů vzdělání, které mají alespoň desetihodinovou týdenní dotaci výuky matematiky po dobu středního vzdělávání;

Vyhodnocení:

MATEMATIKA+ si podržela výrazný motivační potenciál pro zvýšení kvality vzdělávání v matematice. Míra motivace je však bytostně závislá na participaci vysokých škol. Z vývoje zájmu vysokých škol na využití výsledků zkoušky se dá soudit, že vnímají prospěšnost nabídky takové výběrové zkoušky. Chápou, že úspěšné absolvování MATEMATIKY+ je pro ně zárukou úspěšného studia na vysoké škole.

3. podpořit kvalitu výuky v oblasti matematického vzdělávání a nabídnout mimořádně nadaným žákům zkoušku na úrovni jejich schopností; zastavit trend klesající připravenosti uchazečů o vysokoškolské studium matematických a technických oborů;

Vyhodnocení:

Didaktický test zkoušky MATEMATIKA+ i v roce 2020 prokázal schopnost být skutečně vhodným nástrojem pro výběrovou zkoušku, která je výzvou všem žákům středních škol s maturitními obory vzdělávání. Potřebná je podpora této zkoušky ze strany vysokých škol. Centrum proto poskytuje pravidelně vysokým školám strukturované informace a vybízí jejich představitele k využití výsledků pro kvalitnější výběr studentů v rámci přijímacích řízení, a tím i k podpoře kvalitnějšího vzdělávání v matematice na středních školách. Důležitou roli tak sehrávají střední školy a středoškolští učitelé, kteří trend klesající připravenosti uchazečů o vysokoškolské studium matematických a technických oborů nabídkou vhodných seminářů a přípravou žáků na zkoušku MATEMATIKA+ mohou zastavit.

4. potvrdit využitelnost zkoušky MATEMATIKA+ jako jednoho ze závazných kritérií přijímacího řízení ke studiu na VŠ či kritéria pro motivační stipendijní programy;

Vyhodnocení:

V roce 2020 deklarovaly využití výsledků zkoušky MATEMATIKA+ jako součásti kritérií přijímacího řízení nebo kritérií pro motivační stipendijní programy další vysoké školy a fakulty. Úroveň stanovenou [Katalogem požadavků](#) ke zkoušce MATEMATIKA+ již [akceptuje mnoho oborů veřejných vysokých škol](#), které v přijímacím řízení nekonají přijímací zkoušky. Na svých internetových stránkách doporučují budoucím uchazečům, aby se na střední škole v matematice na dané úrovni připravili.

5. na základě průběžného kvalitativního vyhodnocení výsledků maturitní zkoušky formulovat případné úpravy kurikula, metod a podmínek vyučování matematiky na středních školách.

Vyhodnocení:

Z poznatků získaných v rámci realizace zkoušky MATEMATIKA+ a zejména pak z informací získaných při pilotážích testových úloh plyne především doporučení užívat ve výuce takové metody, které umožňují učivo v potřebném rozsahu procvičit a upevnit. Z pilotáží je patrné, že zejména na odborných školách nemá vyučující matematiky potřebný prostor k efektivní výuce. V důsledku časové tísně je nucen uchýlit se k „hutnému“ výkladu, který je pro žáky na dané úrovni spíše odrazující než přínosný, a ani zdaleka mu nezbývá čas na opakování a podporu talentovaných a motivovaných žáků.

Zdá se, že není efektivní zatěžovat výuku matematiky s běžnou hodinovou dotací a určenou všem studentům požadavky v maximalistickém rozsahu. Jeví se vhodnější, aby výuku na vyšší úrovni a celkově i s vyšší hodinovou dotací matematice mohli absolvovat právě žáci se zájmem o budoucí studium na vysokých školách s technickým a přírodovědným zaměřením. Těmto žákům je třeba nabídnout v základní výuce nebo v seminářích možnost dosáhnout úrovně stanovené katalogem požadavků k MATEMATICE+.

5.3. EKONOMIKA

Rozpočtové krytí pokusného ověřování bylo zajištěno prostřednictvím rozvojového programu.

5.3.1. ROZPOČET

V roce 2020 se konala zkouška MATEMATIKA+ v jarním zkušebním období.

Rozpočet účelového úkolu MATEMATIKA+ byl pro rok 2020 rozepsán ve výši 1 632 305 Kč, jak je uvedeno v následující tabulce ve sloupci „Rozpočet“. Navýšení o 300 tis. Kč oproti roku 2019 vyplynulo z rostoucího počtu přihlášených studentů ke zkoušce, a proto vzrostly i náklady na hodnocení (OON).

Celkové čerpání prostředků na tento úkol v roce 2020 je uveden ve sloupci „MATEMATIKA+“ náklady do 30. 9. 2020.

UKAZATEL	ROZPOČET 2019 (UPRAVENÝ)	MATEMATIKA+ NÁKLADY DO 30. 9. 2020	ZBÝVÁ DO KONCE 2020
NÁKLADY CELKEM	1 632 305	1 313 729	318 576
MZDOVÉ PROSTŘEDKY	830 000	624 295	205 705
Z TOHO: PLATY	0	0	0
OON	830 000	624 295	205 705
FKSP (2 %)	0	0	0
OBV	802 305	689 434	112 871
PROVOZNÍ BĚŽNÉ VÝDAJE	683 305	628 264	55 041
ZÁKONNÉ ODVODY	119 000	61 170	57 830

Součástí rozpočtu jsou i náklady na přípravu zkušební dokumentace pro zkoušku matematika rozšiřující v roce 2021. Čerpání rozpočtu bude tedy v průběhu posledního čtvrtletí roku 2020 pokračovat.

6 PERSPEKTIVA – VYUŽITÍ VÝSLEDKŮ POKUSNÉHO OVĚŘOVÁNÍ

Podle získaných informací v průběhu všech sedmi ročníků byla zkouška MATEMATIKA+ velmi dobře přijata odbornou veřejností, a to především učiteli středních škol, žáky, kteří vnímají potřebu matematiky pro svůj další rozvoj, ale i Jednotou českých matematiků a fyziků, která zastupuje širokou matematickou obec. Zejména kvalitní středoškolské učitelé dosáhli jistého zadostiučinění, že jejich snaha o udržení kvality ve vzdělávání byla konečně podpořena.

Od školního roku 2020/2021 je do portfolia nepovinných zkoušek společné části maturitní zkoušky zařazena zkouška matematika rozšiřující. Při její realizaci budou využity zkušenosti z realizace pokusného ověřování ať už z oblasti logistiky, výroby, přípravy obsahu zkoušky a jejího hodnocení, tak také i z průběhu zkoušky na jednotlivých středních školách.

SEZNAM ZKRATEK

BTÚ	Banka testových úloh CZVV
CDAS	Centrální datové uložení
CDOS	Centrální dokumentové pracoviště
CMDK	Centrální řízení datové komunikace
CZVV	Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání
DDT	Datový a digitalizační terminál
DT	Didaktický test
DVF	Datová vytěžovací farma
FKSP	Fond kulturních a sociálních potřeb
GYM	Obory gymnázií
GY4	Čtyřleté obory gymnázií
GY8	Osmileté obory gymnázií
GY6	Šestileté obory gymnázií
ICT	Informační a komunikační technologie
JČMF	Jednota českých matematiků a fyziků
JZS	Jednotné zkušební schéma
LYC	Obory lyceí
OON	Ostatní osobní náklady
MA	Matematika
M+	MATEMATIKA+
MA+	MATEMATIKA+
MŠMT	Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy.
MZ	Maturitní zkouška
NEPOV	Nepovinné
NTE	Skupina technických oborů nástavbového studia
NOS	Skupina netechnických oborů nástavbového studia
OBV	Ostatní běžné výdaje
OON	Ostatní osobní náklady
POV	Povinné
PUP	Uzpůsobení podmínek
RDC	Řídící a dohledové centrum CZVV
RVP	Rámcový vzdělávací program
RVP G	Rámcový vzdělávací program pro gymnázia
SČ MZ	Společná část maturitní zkoušky

SEK	Skupina ekonomických oborů kategorie M
SHP	Skupina hotelových a podnikatelských oborů kategorie M
SHU	Skupina humanitních oborů kategorie M
SOŠ	Školy vyučující obory kategorie M
SOU	Školy vyučující obory kategorie L0
SP-2	Kategorie uzpůsobení MZ sluchové postižení, skupina 2
SPUO-2	Kategorie uzpůsobení MZ specifické poruchy učení a ostatní, skupina 2
SPUO-3-A	Kategorie uzpůsobení MZ specifické poruchy učení a ostatní, skupina 3
SŠ	Střední škola
ST1	Skupina technických oborů kategorie M skupiny 1 (elektrotechnické, chemické, stavební, strojírenské a inženýrské obory)
ST2	Skupina technických oborů kategorie M skupiny 2 (technologické obory)
SUM	Skupina uměleckých oborů kategorie M
SZE	Skupina zemědělských oborů kategorie M
SZD	Skupina zdravotnických oborů kategorie M
TP-2	Kategorie uzpůsobení MZ tělesné postižení, skupina 2
TPKC	Tiskové, produkční a kompletační centrum CZVV
UTE	Skupina technických oborů kategorie L0
UOS	Skupina netechnických oborů kategorie L0
VPŽ	Výsledkový portál žáka
VŠ	Vysoká škola
ZA	Záznamový arch
ZAD	Zadavatel
ZD	Zadávací dokumentace
ZŠ	Základní škola

7 PŘÍLOHY

7.1. DIDAKTICKÝ TEST MATEMATIKA+ 2020



MATEMATIKA+

MXMVD20C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

- Didaktický test obsahuje 23 úloh.
- Časový limit pro řešení didaktického testu je uveden na záznamovém archu.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulačka bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulačka.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi píšete do záznamového archu.
- Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–12) tvoří úlohy otevřené.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 13–23) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je právě jedna odpověď správná.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku se neudělují záporné body.

2 Pravidla správného zápisu odpovědi

- Odpovědi zaznamenávajíte modře nebo černě píšící propisovací tužkou, která píše dostatečně silně a nepřerušovaně.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

- Výsledky píšete čitelně do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- Zápisy uvedené mimo vyznačená bílá pole nebudou hodnoceny.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově запиšte správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvete původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačíte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědi a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

Předmětem autorských práv Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání
Veřejně nepřístupná informace podle ustanovení § 80b zákona č. 561/2004 Sb.

1 bod

- 1 Pro $a \in (0; +\infty)$ a $n \in \mathbf{N}$ zjednodušte (výraz nesmí obsahovat závorky):

$$\sqrt{(a^{4n})^9} =$$

1 bod

- 2 Je dán výraz:

$$\frac{\log_3 9^x}{\log_3 (x - 9)}$$

Určete všechny hodnoty $x \in \mathbf{R}$, pro něž má výraz smysl.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

V dílně se pracuje na dvou strojích.

Na prvním stroji se za určitou dobu vyrobí n výrobků, zatímco na druhém stroji se za dobu o třetinu delší vyrobí $2n$ výrobků.

Na **obou** strojích se za p hodin vyrobí dohromady $10n$ výrobků.

(CZVV)

max. 2 body**3**

- 3.1 Vypočtete, kolikrát více výrobků se za stejnou dobu vyrobí na druhém stroji než na prvním stroji.
- 3.2 V závislosti na p vyjádřete, za kolik hodin se $10n$ výrobků vyrobí jen na prvním stroji.

max. 2 body

- 4 Neznámé číslo je o 462 větší než jeho druhá odmocnina.

Vypočtete neznámé číslo. Sestavenou rovnici řešte v oboru $\mathbb{R}$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 5

Každý z 10 soutěžících mohl získat 0 až 3 trestné body.

Četnosti představující počty soutěžících, kteří získali stejný počet trestných bodů, jsou v první tabulce uvedeny **v nesprávném pořadí**.

Při správném přiřazení četností je medián a modus počtu trestných bodů stejný.

Ze všech takových možností je správná pouze ta, která vede k nejmenší možné hodnotě aritmetického průměru počtu trestných bodů.

Oprava

Trestné body	0	1	2	3
Četnost	0	2	3	5

Trestné body	0	1	2	3
Četnost				

(CZVV)

1 bod

- 5 **Z údajů ve správně vyplněné tabulce vypočtete aritmetický průměr počtu trestných bodů.**

max. 2 body

- 6 V trojúhelníku ABC jsou dány vrcholy $A[-6; 2]$, $B[0; 0]$.
 Střed S kružnice k opsané trojúhelníku ABC leží na souřadnicové ose y .
Vypočtete souřadnice středu S kružnice k .

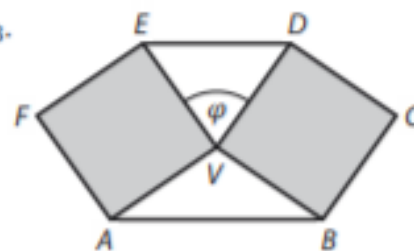
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Šestiúhelník $ABCDEF$ je rozdělen na dva bílé rovnoramenné trojúhelníky a dva shodné tmavé čtverce. Všechny čtyři útvary mají společný vrchol V .

Součet obsahů obou bílých trojúhelníků označme S_B .

Součet obsahů obou tmavých čtverců označme S_T .

Úhel DVE má velikost $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



(CZVV)

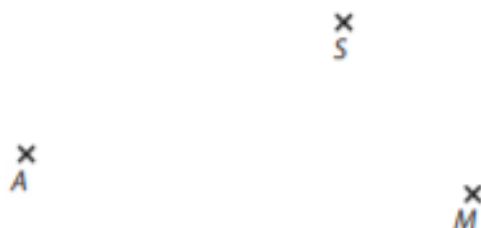
max. 2 body

7

- 7.1 Vyjádřete poměr obsahů $S_B : S_T$ v závislosti na velikosti úhlu φ .
 7.2 Vypočtete velikost úhlu φ , je-li poměr obsahů $S_B : S_T$ roven $1 : 4$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V rovině jsou dány tři různé body A , S , M .



(CZVV)

max. 3 body

- 8** Bod A je vrchol trojúhelníku ABC .
 Bod S je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC . Bod M leží na ose strany BC .
 Vnitřní úhel trojúhelníku ABC při vrcholu A má velikost $\alpha = 60^\circ$.

- 8.1 Hledáme vrcholy B , C trojúhelníku ABC .
 Provedte náčrtek trojúhelníku ABC a запиšte rozbor nebo postup konstrukce.

- 8.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy B , C trojúhelníku ABC a trojúhelník narýsujte.
 Najděte všechna řešení.

V záznamovém archu obtáhněte všechny čáry a křivky **propisovací tužkou**.

max. 2 body

- 9** Graf kvadratické funkce f se dotýká souřadnicové osy x v bodě T .
V předpisu funkce $f: y = x^2 + (p + 2)x + 0,25p^2$ je neznámé reálné číslo p .

Určete

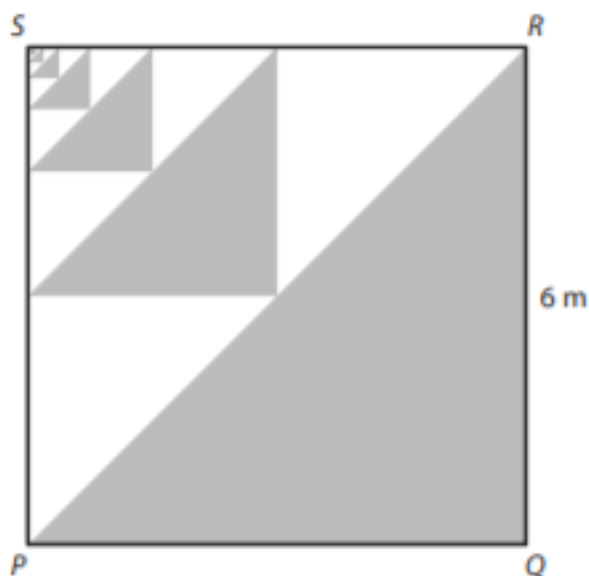
- 9.1 neznámé číslo p ,
9.2 souřadnice bodu dotyku T .

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Ve čtverci $PQRS$ o straně délky 6 m je nekonečně mnoho stále se zmenšujících tmavých rovnooramenných pravoúhlých trojúhelníků. Největší z nich je trojúhelník PQR .

Každý následující trojúhelník má vrchol pravého úhlu uprostřed přepony předchozího trojúhelníku, což je i jediný společný bod obou trojúhelníků.

Středem stejnoolehlosti libovolné dvojice těchto trojúhelníků je vrchol S .



(CZVV)

max. 2 body

- 10** Vyjádřete poměr obsahu všech bílých ploch ku obsahu všech tmavých ploch ve čtverci $PQRS$.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

max. 4 body

- 11** V rostoucí aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí, že první, druhý a pátý člen (a_1, a_2, a_5) v tomto pořadí tvoří první tři členy geometrické posloupnosti.
- 11.1 Vyjádřete diferenci d aritmetické posloupnosti v závislosti na prvním členu a_1 .
- 11.2 Určete kvocient q geometrické posloupnosti.
- 11.3 Určete, kolikátým členem aritmetické posloupnosti je 5. člen geometrické posloupnosti.
- 11.4 Vyjádřete v závislosti na k , kolikátým členem aritmetické posloupnosti je k -tý člen geometrické posloupnosti.

V záznamovém archu uveďte ve všech částech úlohy celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 12

Z dlouhodobých statistik vyplývá, že 5 % osob má vlastnost A a 10 % osob vlastnost B. Obě vlastnosti se nepodmiňují, naopak jsou nezávislé.

(CZVV)

max. 3 body

12 Vypočtete s přesností na tisíciny pravděpodobnosti jevů:

12.1 Náhodně vybraná osoba nemá ani jednu z obou vlastností A, B.

12.2 Alespoň jedna z 5 náhodně vybraných osob má alespoň jednu z obou vlastností A, B.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý postup řešení.

max. 3 body

13 Přiřadte ke každé nerovnici (13.1–13.3) množinu všech jejích řešení (A–F) v oboru $\mathbb{R}$.

13.1 $\frac{|3-x|}{|x-3|} > \frac{x}{3}$ _____

13.2 $\frac{\sqrt{x+3}}{9-x^2} > 0$ _____

13.3 $\frac{9-x^2}{9+x^2} > 1$ _____

- A) $\emptyset$
- B) $(-\infty; 3)$
- C) $(-3; 3)$
- D) $(-3; +\infty)$
- E) $(3; +\infty)$
- F) jiná množina

max. 3 body

- 14 Každá funkce daná některým z následujících předpisů je definována pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathbb{R}$.

Přiřadte ke každému předpisu funkce (14.1–14.3) útvar (A–F), na němž leží všechny body grafu této funkce.

14.1 $y = \frac{2x}{\sqrt{x}}$ _____

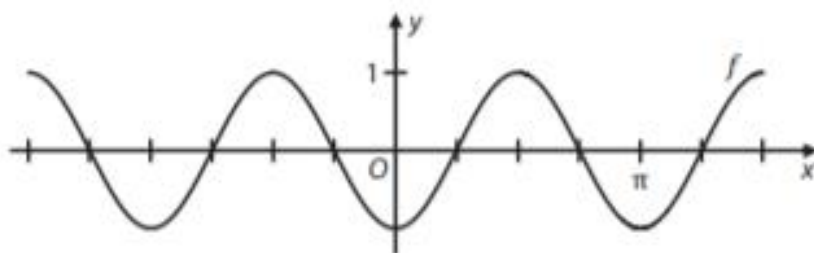
14.2 $y = \frac{|x|}{2x}$ _____

14.3 $y = \frac{\sqrt{x^2}}{2}$ _____

- A) jedna přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou x
- B) jedna přímka různoběžná se souřadnicovou osou x
- C) dvojice rovnoběžných polopřímek neležících na téže přímce
- D) dvojice různoběžných polopřímek
- E) hyperbola
- F) parabola

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 15

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestaven graf goniometrické funkce f definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$.



(CZVV)

2 body

- 15 Která z rovností není předpisem funkce f ?

- A) $y = -\cos 2x$
- B) $y = -\cos(-2x)$
- C) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
- D) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$
- E) Všechny uvedené rovnosti (A–D) jsou předpisy téže funkce f .

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Pětimístný kód má být sestaven z 5 **různých** číslic.

Z číslic 0–9 kód musí obsahovat číslice 0, 1, 2 a s nimi ještě další dvě číslice. Číslice 0 bude uprostřed kódu.

(CZVV)

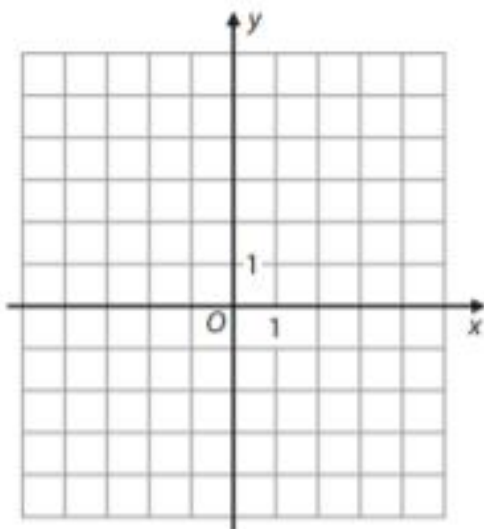
2 body

16 Jaký je počet všech možností pro sestavení kódu?

- A) 144
- B) 252
- C) 432
- D) 504
- E) jiný počet

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

V trojúhelníku NOP platí: $\overrightarrow{NO} = (2; -5)$, $\overrightarrow{OP} = (1; 5)$.



(CZVV)

2 body

17 Jaká je velikost konvexního úhlu ONP ?

Výsledek je zaokrouhlen na desetiny stupně.

- A) $67,9^\circ$
- B) $68,0^\circ$
- C) $68,1^\circ$
- D) $68,2^\circ$
- E) jiná velikost

2 body

- 18** Na parabole s ohniskem $F[0; 9]$ a řídící přímkou $d: y = -9$ leží dva různé body A, B , jejichž druhá souřadnice je $y = 4$.

Jaká je vzdálenost bodů A, B ?

- A) menší než 18
- B) 18
- C) 20
- D) 22
- E) 24

2 body

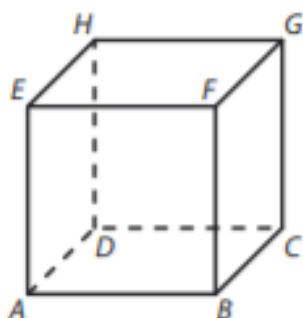
- 19** Bod $A[0; 1; 2]$ je vrchol krychle $ABCDEFGH$.
Stěna $EFGH$ této krychle leží v rovině $q: 2x - 3y + z + 15 = 0$.

Jaký je povrch této krychle?

- A) menší než 84
- B) 84
- C) 126
- D) 192
- E) větší než 192

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

V krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky 6 cm je umístěn **trojboký** jehlan $ACEH$.



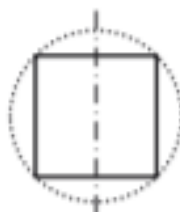
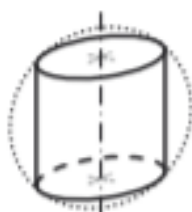
(CZVV)

2 body**20 Jaký je objem trojbokého jehlanu $ACEH$?**

- A) 36 cm^3
- B) 48 cm^3
- C) 54 cm^3
- D) 72 cm^3
- E) jiný objem

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Kulová plocha o poloměru r je opsána rovnostrannému válci.
(Výška rovnostranného válce se shoduje s průměrem podstavy.)



Osový řez válce

(CZVV)

2 body**21 Jaký je objem válce?**

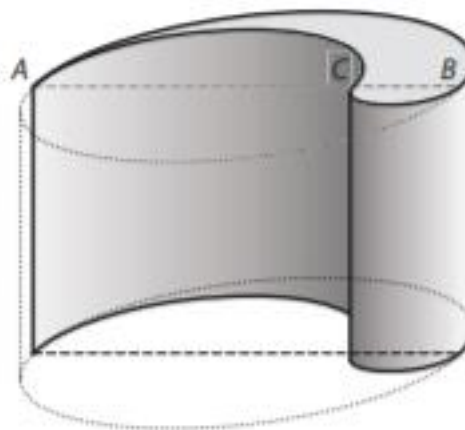
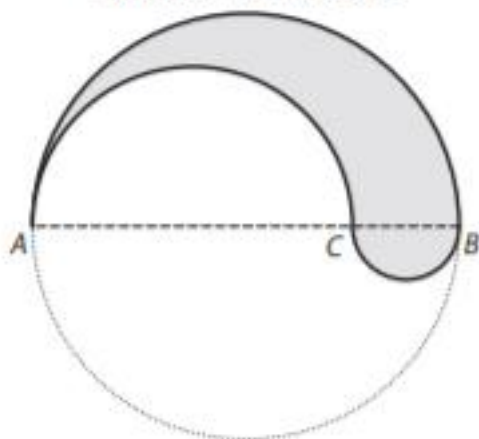
- A) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi r^3$
- B) $\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \pi r^3$
- C) $\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \pi r^3$
- D) $\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \pi r^3$
- E) jiný objem

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Z rotačního válce s výškou 10 cm a průměrem podstavy 16 cm bylo vysoustruženo nové kolmé těleso stejné výšky.

Podstava nového tělesa je ohraničena třemi půlkružnicemi s krajními body A , B , C , kde bod C dělí průměr AB podstavy původního válce na dvě úsečky, z nichž CB má délku 4 cm.

Podstava nového tělesa



Nové těleso je (obdobně jako rotační válec) ohraničeno dvěma podstavami a pláštěm.

(CZVV)

2 body

22 O kolik cm^2 se liší obsah pláště nového tělesa a obsah pláště původního válce?

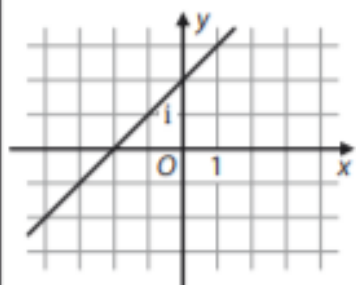
- A) Nové těleso má obsah pláště o $32\pi \text{ cm}^2$ menší než původní válec.
- B) Nové těleso má obsah pláště o $16\pi \text{ cm}^2$ menší než původní válec.
- C) Oba obsahy jsou stejné.
- D) Nové těleso má obsah pláště o $32\pi \text{ cm}^2$ větší než původní válec.
- E) Obsahy se liší jinak, než je výše uvedeno.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 23

V Gaussově rovině jsou zobrazeny tři množiny komplexních čísel z .

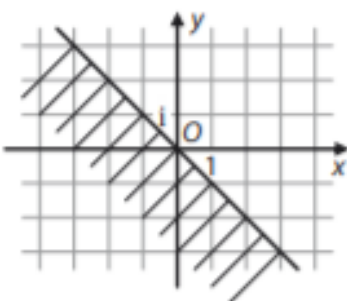
23.1

Přímka



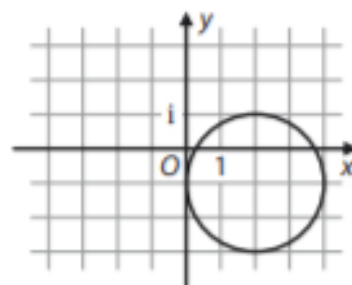
23.2

Polorovina



23.3

Kružnice



(CZVV)

max. 3 body

23 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (23.1–23.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

23.1 Zobrazená přímka je určena rovnicí $|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$.

A	N
☐	☐

23.2 Zobrazená polorovina je určena nerovnicí $|z + 1| \leq |z - i|$.

☐	☐
--------------------------	--------------------------

23.3 Zobrazená kružnice je určena rovnicí $|2i| = |z - 2 + i|$.

☐	☐
--------------------------	--------------------------

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.

7.2. KLÍČ SPRÁVNÝCH ŘEŠENÍ DT MATEMATIKA+ 2020



MATURITNÍ ZKOUŠKA 2020 – JARNÍ TERMÍN

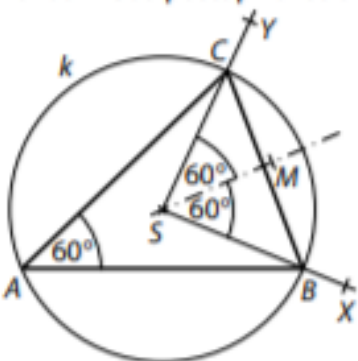
KLÍČ SPRÁVNÝCH ŘEŠENÍ

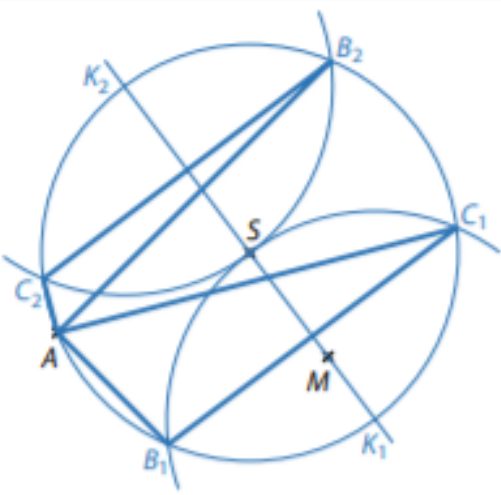


MATEMATIKA +

KÓD TESTU: MXMVD20C0T01

	Celkem	Uzavřených	Otevřených
Počet úloh	23	11	12

Úloha	Správné řešení	Body
1	a^{18n}	1 b.
2	$x \in (9; 10) \cup (10; +\infty)$	1 b.
3		max. 2 b.
3.1	1,5krát	1 b.
3.2	2,5p	1 b.
4	$K = \{484\}$ a postup řešení	max. 2 b.
5	0,9	1 b.
6	$S[0; 10]$	max. 2 b.
7		max. 2 b.
7.1	$\sin \varphi : 2$	1 b.
7.2	$\varphi = \frac{\pi}{6}$	1 b.
8		max. 3 b.
8.1	náčrtek a rozbor nebo postup konstrukce, např.  Hledáme bod B 1. $k(S; SA)$ 2. $\rightarrow SX; \angle XSY = 120^\circ$ a přímka MS je osa $\sphericalangle XSY$ Hledáme bod C 1. $k(S; SA)$ 2. $\rightarrow SY$	1 b.

8.2		max. 2 b.
9		max. 2 b.
9.1	$p = -1$	1 b.
9.2	$T\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$	1 b.
10	1 : 2 a postup řešení	max. 2 b.
11		max. 4 b.
11.1	$d = 2a_1$ a postup řešení	1 b.
11.2	$q = 3$ a postup řešení	1 b.
11.3	41. člen a postup řešení	1 b.
11.4	$\frac{3^{k-1} + 1}{2}$ a postup řešení	1 b.
12		max. 3 b.
12.1	$P(A' \cap B') = 0,855$ a postup řešení	1 b.
12.2	$P \doteq 0,543$ a postup řešení	max. 2 b.
13		max. 3 b.
13.1	B	3 podúlohy 3 b.
13.2	C	2 podúlohy 2 b.
13.3	A	1 podúloha 1 b.
		0 podúloh 0 b.
14		max. 3 b.
14.1	F	3 podúlohy 3 b.
14.2	C	2 podúlohy 2 b.
14.3	D	1 podúloha 1 b.
		0 podúloh 0 b.
15	E	2 b.
16	D	2 b.
17	D	2 b.

18	E	2 b.
19	B	2 b.
20	A	2 b.
21	A	2 b.
22	C	2 b.
23		max. 3 b.
23.1	N	3 podúlohy 3 b.
23.2	A	2 podúlohy 1 b.
23.3	A	1 podúloha 0 b.
		0 podúloh 0 b.
CELKEM		50 bodů

Všetchna ekvivalentní vyjádření jsou možná.